TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische Processen 2 (2S480) op 16 augustus 2000, 14.00-17.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

1. Beschouw een Markovproces met drie toestanden (A, B, C) en met de volgende Q-matrix:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a. Bepaal de matrix P van éénstapsovergangskansen van de bij dit Markovproces behorende Markovketen.
b. Bepaal de evenwichtsverdeling (d.w.z., limietverdeling) van het Markovproces.
c. Wat is de relatie tussen de evenwichtsverdeling van de Markovketen en de evenwichtsverdeling van het Markovproces?
d. Beschouw een semi-Markovproces met de bovengevonden matrix P van overgangskansen, en met *deterministische* tijden in de toestanden A, B, C; al deze tijden zijn gelijk aan één. Wat is op de lange duur de kans om in toestand A te zijn?

2. Beschouw een wachtrijsysteem bestaande uit twee bedieningsstations Q_1 ('kastje') en Q_2 ('muur'). Het systeem bevat $N \geq 2$ klanten. Er kunnen geen klanten bijkomen of weggaan. In Q_1 zijn twee bedienden. Klanten in Q_1 worden in bediening genomen (door de eerste vrijkomende bediende) in volgorde van aankomst. Bedieningstijden in Q_1 zijn exponentieel verdeeld met intensiteit λ. Nadat een klant in Q_1 is bediend, betreedt hij onmiddellijk Q_2. In Q_2 is één bediende. Deze bedient klanten in volgorde van aankomst. Bedieningstijden in Q_2 zijn exponentieel verdeeld met intensiteit μ. Nadat een klant in Q_2 is bediend, betreedt hij onmiddellijk Q_1. Zij X_t het aantal klanten in Q_1 op tijdstip $t \geq 0$.
a. Stel dat $X_0 = N$. Wat is de kansverdeling van de tijd tot voor het eerst $X_t < N$?
b. Stel dat $X_0 = N - 1$. Wat is de kans dat de eerste voltooiing van een bediening in Q_2 plaats vindt, en wat is de kans dat in de eerste t tijdseenheden precies één bediening wordt voltooid?
c. Voor welke waarden van λ en μ bestaat de limietverdeling van X_t voor $t \to \infty$?
d. Bepaal de evenwichtsverdeling van het aantal klanten in Q_1.

3. Beschouw het 'Poisson-geboorteproces' $(X(t))_{t \geq 0}$ op de toestandsruimte $\{0, 1, \ldots, n\}$, waarbij $X(0) = 0$. Het proces evolueert als volgt: stel bijvoorbeeld dat $X(t) = j$. Na een exponentieel verdeelde periode met verwachting $1/\lambda$ springt het proces van j naar $j + 1$. Dit gaat net zolang door totdat toestand n bereikt wordt. Daarna blijft het proces in deze toestand.
a. Geef de Q-matrix van dit proces.

b. Zij $n = 1$. Geef de voorwaartse differentiaalvergelijkingen van Kolmogorov voor het proces, en geef de oplossing van deze vergelijkingen.

4. (onderdeel d staat los van de onderdelen a,b en c)
Beschouw het volgende vertakkingsproces: Zij X_n het aantal deeltjes in de n-de generatie; $X_0 = 1$. Elk deeltje krijgt, onafhankelijk van alle andere deeltjes, k nakomelingen met kans $P_k = (1-c)c^k$, $k = 0, 1, \ldots$, met $0 < c < 1$.
a. Wat is het verwachte aantal nakomelingen van één deeltje?
b. Wat is $\mathrm{E}(X_n)$?
c. Wat is de kans dat de populatie ooit uitsterft?
d. Beschouw een Markovproces $\{Y_t, t \geq 0\}$ met twee toestanden 1 en 2, met $q_{11} = -1$ en $q_{22} = -3$ en voor de onderliggende Markovketen: $P_{12} = P_{21} = 1$. Bereken $\mathrm{P}(Y_t = 1 | Y_0 = 1)$ door gebruik te maken van uniformisatie.