TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische Processen 2 (2S480) op 20 november 2002, 09.00-12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.
Gegeven is: de Erlang-n kansverdeling met verwachting n/λ heeft de vorm $1-\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$, met als dichtheid $\lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \ t > 0$.

Opgave 1. Beschouw een Markovproces met drie toestanden (A, B, C) en met de volgende Q-matrix:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a. [3 pt.] Bepaal de matrix P van éénstapsovergangskansen van de bij dit Markovproces behorende Markovketen.
b. [3 pt.] Bepaal de evenwichtsverdeling (d.w.z., limietverdeling) van het Markovproces.
c. [4 pt.] Wat is de relatie tussen de evenwichtsverdeling van de Markovketen en de evenwichtsverdeling van het Markovproces?

Opgave 2. Beschouw het volgende vertakkingsproces: Zij X_n het aantal deeltjes in de n-de generatie; $X_0 = 1$. Elk deeltje krijgt, onafhankelijk van alle andere deeltjes, 0 nakomelingen met kans 1/4, 1 nakomeling met kans $3/4 - a$ en 2 nakomelingen met kans a, $0 \leq a \leq 3/4$.
a. [2 pt.] Wat is het verwachte aantal nakomelingen van een deeltje?
b. [2 pt.] Wat is $\mathrm{E}(X_n)$?
c. [3 pt.] Bepaal de kans dat de populatie ooit uitsterft, voor alle waarden van $a \in [0, 3/4]$.
d. [3 pt.] Stel dat elk deeltje in elke generatie een exponentieel verdeelde levensduur heeft, met verwachting $1/\lambda$, en aan het eind van dat leven nakomelingen krijgt volgens het boven beschreven mechanisme. Bepaal de Laplace-Stieltjes transformatie van de som van de levensduren van alle deeltjes uit generatie 0 en 1.

Opgave 3. Beschouw het geboorte- en sterfteproces $\{X(t), t \geq 0\}$ met geboorte-intensiteiten $\lambda_n, n = 0, 1, \ldots$ en sterfte-intensiteiten $\mu_n, n = 1, 2, \ldots$. Veronderstel dat de limietverdeling $P_j := \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}(X(t) = j | X(0) = i)$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ van dit proces bestaat.
a. [3 pt.] Stel de balansvergelijkingen op waaraan deze limietkansen moeten voldoen.
b. [4 pt.] Zij $\lambda_n = (n + 1)\lambda$, $n = 0, 1, \ldots$ en $\mu_n = n\mu$, $n = 1, 2, \ldots$. Bepaal de limietverdeling van dit geboorte- en sterfteproces.
c. [3 pt.] Geef de voorwaartse differentiaalvergelijkingen van Kolmogorov voor dit Markovproces.

Opgave 4. Beschouw een kiosk met één bediende en onbegrensde wachtruimte. Klanten komen aan volgens een Poissonproces met parameter λ. De bedieningstijd van een klant heeft een exponentiële verdeling met verwachting $\frac{1}{\mu}$. Zodra de bediende alle klanten geholpen heeft gaat hij een exponentieel verdeelde tijd (met parameter ν) koffie halen om de hoek van de straat. Als hij terugkomt van de koffie begint hij met het helpen van de klanten die in de tussentijd zijn aangekomen. Als dat er geen is, blijft hij wachten op de eerstvolgende klant.
a. [3 pt.] We zijn geinteresseerd in het aantal klanten bij de kiosk. Definieer een geschikt Markovproces voor dit systeem en teken het bijbehorende toestands-overgangsdiagram.
b. [3 pt.] Geef alle (globale) evenwichtsvergelijkingen van uw Markovproces.
c. [4 pt.] Stel dat u de kansverdeling van uw Markovproces op een gegeven tijdstip t zou willen bepalen. Beschrijf hoe u dit (numeriek) kunt doen met behulp van de uniformisatiemethode.

Opgave 5. Toeristen komen aan bij een rondvaartboot volgens een Poissonproces met parameter λ. De rondvaartboot gaat pas varen wanneer er N toeristen zijn. De vaartijd heeft een algemene verdeling $F(\cdot)$, met dichtheid $f(\cdot)$. Toeristen die aankomen aan de kade als de rondvaartboot bezig is aan een vaart, vertrekken onmiddellijk en zoeken een andere toeristische attractie.
a. [3 pt.] Bepaal de lange-termijn intensiteit waarmee de rondvaartboot vertrekt.
b. [3 pt.] Stel dat de vaartijd uniform verdeeld is op het interval $[0, C]$, en veronderstel dat een bepaalde toerist op een willekeurig moment arriveert als de rondvaartboot weg is. Wat is de kans dat de rondvaartboot binnen t tijdseenheden weer terug is?
c. [4 pt.] Stel nu dat de rondvaartboot in ieder geval na T tijdseenheden vertrekt, of er nu wel of niet N klanten aanwezig zijn. Laat zien dat de lange-termijn intensiteit waarmee de rondvaartboot nu vertrekt gelijk is aan

$$\left[\frac{N}{\lambda} + (T - \frac{N}{\lambda}) \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^j}{j!} - \frac{N}{\lambda} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^N}{N!} + \int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x \right]^{-1}.$$