TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische Processen 2 (2S480) op 3 juli 2001, 09.00-12.00 uur.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Normering: 3 punten voor vraag 1, 2 punten voor vraag 2, 2 punten voor vraag 3, 1.5 punt voor vraag 4, en 1.5 punt voor vraag 5.

1. Beschouw een parkeerterrein met K parkeerplaatsen. Auto's (plus automobilist) op zoek naar een parkeerplaats arriveren volgens een Poissonproces met intensiteit λ. Als alle parkeerplaatsen bezet zijn, gaat de arriverende auto weg. Als één of meer plaatsen beschikbaar zijn, blijft de arriverende auto een exponentieel verdeelde tijd geparkeerd, met gemiddelde $1/\mu$. Zij $\{X_t,\ t \geq 0\}$ het aantal geparkeerde auto's op tijdstip t.
a. Beredeneer dat $\{X_t,\ t \geq 0\}$ een Markovproces is.
b. Geef de Q-matrix van overgangsintensiteiten van dit Markovproces.
c. Voor welke waarden van λ en μ bestaat de evenwichtsverdeling van dit Markovproces?
d. Geef de evenwichtsverdeling voor het geval dat $\mu = 2\lambda$.
e. Zij $X_0 = 0$. Wat is de verwachte tijd tot het parkeerterrein voor het eerst 2 auto's bevat?

2. Beschouw het Markovproces $\{X_t,\ t \geq 0\}$ uit het vorige vraagstuk, met $K = 1$ parkeerplaats.
a. Zij $X_0 = 0$. Geef de voorwaartse differentiaalvergelijkingen van Kolmogorov voor het Markovproces $\{X_t,\ t \geq 0\}$, en los deze vergelijkingen op.
b. Bepaal $P(X_t = 1 | X_0 = 0)$ met behulp van uniformisatie (aanwijzing: beschouw een Markovproces met twee toestanden 0 en 1, waarin de gemiddelde tijd in elk der twee toestanden gelijk is aan $1/(\lambda + \mu)$.)

3. Beschouw het $M/H_2/3/4$ wachtrijsysteem. Dit is een systeem met Poisson(λ) aankomsten, 3 bedienden en een wachtruimte ter grootte 1. Bedieningstijden zijn hyperexponentieel verdeeld: met kans p is de bedieningsduur exponentieel verdeeld met parameter μ_1 en met kans $1 - p$ is de bedieningsduur exponentieel verdeeld met parameter $\mu_2 \neq \mu_1$. Welke van de twee verdelingen van toepassing is, wordt pas bekend als een klant in bediening gaat.
a. Definieer een geschikt Markovproces voor dit systeem en teken het bijbehorende toestands-overgangs-diagram.
b. Geef alle (globale) evenwichtsvergelijkingen.

4. Beschouw het volgende vertakkingsproces: Zij X_n het aantal deeltjes in de n-de generatie; $X_0 = 1$. Elk deeltje krijgt, onafhankelijk van alle andere deeltjes, 0 nakomelingen met kans p en 2 nakomelingen met kans $1 - p$.
a. Wat is $\mathrm{E}(X_n)$?
b. Wat is de kans dat de populatie ooit uitsterft?

5. Beschouw de volgende stochastische wandeling: $Y_1, Y_2, \ldots$ zijn onafhankelijke stochastische variabelen, met $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots$. Zij $Z_0 = 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
a. Bepaal $P(Z_{2n} = 0, Z_{2n+2} = 0)$.
b. Wat is $P(Z_2 > 0, Z_4 > 0 | Z_6 = 0)$?