TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Schetsmatige uitwerkingen Tentamen Stochastische Processen 2 (2S480) op 2 juli 2002, 09.00-12.00 uur.
Opmerking: Dit is slechts een schets van de uitwerkingen. Geef op het tentamen meer details!

Opgave 1.
a.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

b. mbv rate in = rate out:

$$P_1 = \frac{9}{21}, P_2 = \frac{5}{21}, P_3 = \frac{7}{21}.$$

c. Samengevat:

$$P_1 : P_2 : P_3 \ \text{ als } \ \frac{\pi_1}{\nu_1} : \frac{\pi_2}{\nu_2} : \frac{\pi_3}{\nu_3}.$$

d. mbv onderdeel **c**, of $\pi = \pi P$ oplossen:

$$\pi_1 = \frac{36}{89}, \pi_2 = \frac{25}{89}, \pi_1 = \frac{28}{89}.$$

Opgave 2.
a. Tijd operationeel en reparatietijd zijn exponentieel verdeeld, dus geheugenloos.
b.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & \mu & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & -((K-2)\lambda+\mu) & \mu & 0 \\ 0 & & & & \ddots & (K-1)\lambda & -((K-1)\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K\lambda & -K\lambda \end{pmatrix}$$

c. voor alle $\lambda, \mu \geq 0$.
d. Merk op: equivalent met machine reparatiemodel (zie aantekeningen)! Mbv toestandsovergangsdiagram balansvergelijkingen opstellen en oplossen levert
$(P_j = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = j | X(0) = i), i, j = 0, 1, \ldots)$:

$$P_j = \frac{1/j!}{\sum_{k=0}^{K} 1/k!},$$

e. Voorwaartse vergelijkingen van Kolmogorov:

$$\begin{aligned} P'_{00}(t) &= \lambda P_{01}(t) - \mu P_{00}(t), \\ P'_{01}(t) &= \mu P_{00}(t) - \lambda P_{01}(t). \end{aligned}$$

Volg voor het oplossen Opgave 16 van de Instructie. Dit levert:

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{01}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

Opgave 3.
a. $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ is een MP, met
$X(t) =$ aantal klanten in het systeem op tijdstip t,
$Y(t) =$ fase van het aankomstproces op tijdstip t,
$X(t) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, Y(t) \in \{0, 1\}$. Hierin beschouwen we bv $Y(t) = 0$ als de toestand waarin nog geen aankomstfase verstreken is. Toestand-overgangsdiagram:

b.

$$\lambda P_{00} = \mu P_{10} \quad , \quad \lambda P_{01} = \mu P_{11} + \lambda P_{00}$$

$$(\lambda+\mu) P_{10} = 2\mu P_{20} + \lambda P_{01} \quad , \quad (\lambda+\mu) P_{11} = 2\mu P_{21} + \lambda P_{20}$$

$$(\lambda+2\mu) P_{i0} = 2\mu P_{i+1,0} + \lambda P_{i-1,1} \quad , \quad (\lambda+2\mu) P_{i1} = 2\mu P_{i+1,1} + \lambda P_{i0} \quad , \quad i = 2, 3$$

$$(\lambda+2\mu) P_{40} = \lambda P_{31} + \lambda P_{41} \quad , \quad (\lambda+2\mu) P_{41} = \lambda P_{40}.$$

Opgave 4.
a. Definieer $Z :=$ aantal nakomelingen van een deeltje, dan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P(z)|_{z=1} = \lambda + \frac{c}{1-c},\\ \mathbb{P}(Z=1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}P(z)|_{z=0} = \lambda e^{-\lambda}(1-c) + e^{-\lambda}c(1-c).\end{aligned}$$

b. $\mathbb{E}X_n = [\mathbb{E}Z]^n = \left(\lambda + \frac{c}{1-c}\right)^n$.
c. Populatie sterft met kans 1 uit als $\mathbb{E}Z \leq 1$. Dus $\lambda + \frac{c}{1-c} \leq 1$ oplossen levert $c \leq \frac{1-\lambda}{2-\lambda}$.
d. $\mathbb{P}(X_{1,2}=0; X_{2,2}=0) = \mathbb{P}(X_{1,2}=0)\mathbb{P}(X_{2,2}=0)$. Beschouw proces 1 en definieer voor model i Z_i en P_i $(i=1,2)$ op analoge wijze als Z en P. Conditioneer op het aantal deeltjes in de eerste generatie en merk op dat $\mathbb{P}(Z_1=0) = P_1(0) = e^{-\lambda}$, dan

$$\mathbb{P}(X_{1,2}=0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1=j)\left(e^{-\lambda}\right)^j = P_1(e^{-\lambda}) = e^{-\lambda(1-e^{-\lambda})}.$$

Proces 2 gaat analoog, dan:

$$\mathbb{P}(X_{1,2}=0; X_{2,2}=0) = e^{-\lambda(1-e^{-\lambda})}\frac{1-c}{1-c(1-c)}.$$

e. $\mathbb{E}Z_1 = \lambda$ en $\mathbb{E}Z_2 = \frac{c}{1-c}$, dan

$$\mathbb{E}X_{1,n} + \mathbb{E}X_{2,n} = \lambda^n + \left(\frac{c}{1-c}\right)^n.$$

Als $n=1$, dan $P(z)$ is genererende functie van $Y_1 + Y_2$; twee onafhankelijke families van nakomelingen.