Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 1

Inhoud

Praktische informatie

- Inhoud vak
- Studiemateriaal: boek Kolman-Hill en MATLAB op laptop
- Studiewijzer: Colleges, Zelfstudie en Begeleide Zelfstudie
- MATLAB toets
- Tussentoets in week 4 (regulier)
- TELMME oefenprogramma (schakel): www.telmme.nl (enrollment key: 2ds06jk of 2ds06jkschakel)

Reactievergelijkingen kloppend maken

Oxidatie van ammonia tot stikstofoxide en water:

$$(x_1)NH_3 + (x_2)O_2 \longrightarrow (x_3)NO + (x_4)H_2O$$

Behoud van massa (atomen):

$$\begin{array}{ll} \text{atoom N:} & x_1 = x_3, \\ \text{atoom H:} & 3x_1 = 2x_4, \\ \text{atoom O:} & 2x_2 = x_3 + x_4. \end{array}$$

Dit geeft een stelsel lineaire vergelijkingen in vier onbekenden:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\ 3x_1 & & & & & - & 2x_4 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \end{array}$$

Hoe los je zo'n stelsel op?
Antwoord: met de *eliminatiemethode*

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\
3x_1 & & & & & - & 2x_4 & = 0 \\
& & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0
\end{array}
$$

Trek de eerste vergelijking drie maal van de tweede af om x_1 te elimineren uit de tweede vergelijking:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\
& & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = 0 \\
& & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0
\end{array}
$$

Verwissel de tweede en derde vergelijking:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\
& & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \\
& & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = 0
\end{array}
$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & - & x_3 & & & = 0 \\ & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \\ & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = 0 \end{array}$$

Deel de tweede vergelijking door 2 en de derde door 3:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & - & x_3 & & & = 0 \\ & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 & = 0 \\ & & & x_3 & - & \frac{2}{3}x_4 & = 0 \end{array}$$

Tel de derde vergelijking een half maal op bij de tweede en één maal bij de eerste:

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & & & & - & \frac{2}{3}x_4 & = 0 \\ & x_2 & & & - & \frac{5}{6}x_4 & = 0 \\ & & & x_3 & - & \frac{2}{3}x_4 & = 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & - & \frac{2}{3}x_4 & = 0 \\
 & x_2 & & - & \frac{5}{6}x_4 & = 0 \\
 & & x_3 & - & \frac{2}{3}x_4 & = 0
\end{array}
$$

Het stelsel was onderbepaald: er is geen unieke oplossing.
Er zijn oneindig veel oplossingen die als volgt kunnen worden gevonden.
Als x_4 vrij gekozen wordt, zeg $x_4 = t \in \mathbb{R}$, dan liggen x_1, x_2 en x_3 vast.
De algemene oplossing van dit stelsel is:

$$x_1 = \frac{2}{3}t,\ x_2 = \frac{5}{6}t,\ x_3 = \frac{2}{3}t,\ x_4 = t \in \mathbb{R}.$$

Voor $t = 6$ krijg je gehele getallen x_1, x_2, x_3, x_4:

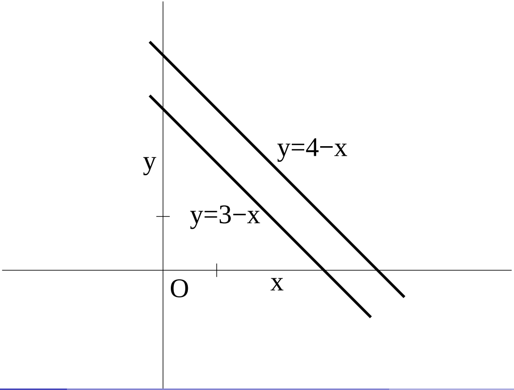
$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O$$

Stelsels lineaire vergelijkingen

Er zijn drie mogelijkheden voor een lineair stelsel:

1. Het stelsel is *strijdig* of *inconsistent* (heeft geen oplossingen)

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$



Een inconsistent stelsel herkent men gemakkelijk door systematisch toepassen van de eliminatiemethode.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

Elimineren van x uit de tweede vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen van de laatste vergelijking met $-\frac{1}{2}$ geeft:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

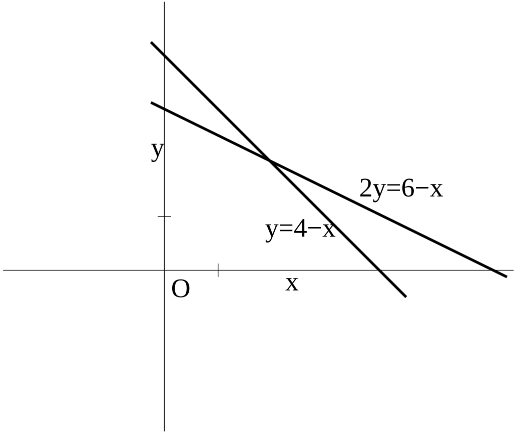
Uit een inconsistent stelsel is met de eliminatiemethode altijd de onoplosbare vergelijking

$$0 = 1$$

af te leiden.

2. Het stelsel is *consistent* en heeft precies één oplossing

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}$$



De eliminatiemethode vindt deze unieke oplossing als volgt.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

Elimineren van x uit de tweede vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

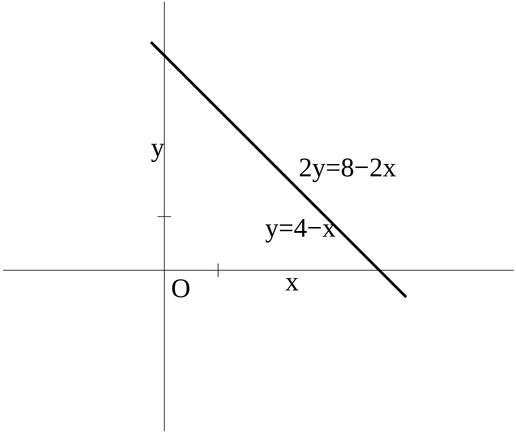
Elimineren van y uit de eerste vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Dit is de unieke oplossing van het stelsel.

3. Het stelsel is consistent en heeft oneindig veel oplossingen

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$



De eliminatiemethode geeft een manier om de oneindig vele oplossingen te beschrijven.

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

Elimineren van x uit de tweede vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

ofwel

$$x + y = 4$$

Kies y vrij in $\mathbb{R}$, daarmee ligt x vast.
Een *parametervoorstelling* (met parameter t) van de algemene oplossing van dit stelsel is dus

$$\begin{aligned} x &= 4 - t \\ y &= t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Twee stelsels lineaire vergelijkingen heten *equivalent* als zij precies dezelfde oplossingen hebben.

Voorbeeld

De enige oplossing van het stelsel

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

is $x = 2, y = 3$. Dit is ook de enige oplossing van

$$\begin{array}{rcr} 8x - 3y & = & 7 \\ 3x - 2y & = & 0 \\ 10x - 2y & = & 14 \end{array}$$

en van het stelsel

$$\begin{array}{rcrcr} x & & & = & 2 \\ & & y & = & 3 \end{array}$$

Alledrie de stelsels zijn dus equivalent.

De eliminatiemethode

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

Vervang de tweede vergelijking door de tweede min 2 maal de eerste (elimineer x):

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ & & 7y & = & 21 \end{array}$$

Deel de tweede vergelijking door 7 (oftewel vermenigvuldig deze met $\frac{1}{7}$):

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ & & y & = & 3 \end{array}$$

Vervang de eerste vergelijking door de eerste plus 3 maal de tweede (elimineer y):

$$\begin{array}{rcrcr} x & & & = & 2 \\ & & y & = & 3 \end{array}$$

Telkens gaat het stelsel over in een equivalent stelsel.

Om een stelsel te vervangen door een equivalent stelsel dat eenvoudiger op te lossen is kunnen we de volgende drie soorten operaties toepassen

1. *Verwissel twee vergelijkingen van plaats.*
2. *Vermenigvuldig een vergelijking met een constante ongelijk aan nul.*
3. *Vervang een vergelijking door de som van zichzelf en een veelvoud van een andere vergelijking.*

NB: Elk van deze operaties is omkeerbaar.

NB: Elk van deze operaties behoudt de oplossingsverzameling van het stelsel.

De *eliminatiemethode* past deze drie soorten operaties herhaaldelijk toe om zoveel mogelijk variabelen te elimineren (dwz verwijderen uit alle behalve één vergelijking) en zo een lineair stelsel op te lossen.

Het stelsel

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -7 \\ 2x & + & y & = & 7 \end{array}$$

kan compact worden weergegeven door de *matrix*

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ of de } \textit{gepartitioneerde matrix } \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Dit is de *uitgebreide matrix* van het stelsel. Zonder de rechterleden krijgen we de *coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De drie soorten operaties op stelsels lineaire vergelijkingen corresponderen met *elementaire rij-operaties* op matrices

1. *Verwissel twee rijen van de matrix.*
2. *Vermenigvuldig een rij met een constante ongelijk aan nul.*
3. *Vervang een rij van de matrix door de som van zichzelf en een veelvoud van een andere rij.*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Vervang de tweede rij door de tweede min 2 maal de eerste:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 7 & 21 \end{array}\right]$$

Deel de tweede rij door 7:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Vervang de eerste rij door de eerste plus 3 maal de tweede:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Telkens gaat de matrix over in de uitgebreide matrix van een equivalent stelsel.
Uit de laatste uitgebreide matrix lezen we gemakkelijk de (unieke) oplossing af: $x = 2$, $y = 3$.

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -4 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 4 \end{array}$$

Eliminatiemethode geeft:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

De algemene oplossing is eenvoudig af te lezen uit de laatste matrix:

$$\begin{array}{rcl} x & = & t+4 \\ y & = & t-4 \\ z & = & t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

Een *matrix* $A = [a_{ij}]$ is een rechthoekige tabel met getallen.
Als er m rijen en n kolommen zijn, dan heet A een *$m \times n$ matrix.*
Het getal a_{ij} in de i-de rij en j-de kolom van $A = [a_{ij}]$ heet het i, j-de *element* van A.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ is een } 2 \times 3 \text{ matrix; } a_{1,3} = -5.$$

Twee $m \times n$ matrices $A = [a_{ij}]$ en $B = [b_{ij}]$ zijn *gelijk* als $a_{ij} = b_{ij}$ voor alle $i = 1, \ldots m$ en alle $j = 1, \ldots n$.

Voorbeeld

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } B \neq A \text{ want } b_{11} \neq a_{11}.$$

Als een matrix evenveel rijen als kolommen heeft ($n \times n$) dan heet deze een *vierkante* matrix.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ is vierkant } (2 \times 2).$$

Een matrix met 1 kolom (of 1 kolom uit een matrix) heet ook wel een vector: een $n \times 1$ matrix is een *n-vector.*
Een matrix met 1 rij (of 1 rij uit een matrix) heet ook wel een rijvector: een $1 \times n$ matrix is een *n-rijvector.*

Voorbeeld

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ is een 3-vector. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ is een 3-rijvector.

Matrixoperaties en rekenregels

Definitie

De *getransponeerde* A^T van een $m \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ is de $n \times m$ matrix $C = [c_{ij}]$ gedefinieerd door $c_{ij} = a_{ji}$ (dus $a^T_{ij} = a_{ji}$, rijen en kolommen zijn verwisseld). MATLAB: A'

Een reële matrix heet *symmetrisch* als $A = A^T$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Een symmetrische matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = B^T$$

NB: een symmetrische matrix is vierkant ($n \times n$)

Definitie

A en B zijn matrices van gelijke afmetingen (beide $m \times n$)
De *som* $A + B$ van $A = [a_{ij}]$ en $B = [b_{ij}]$ is de matrix $C = [c_{ij}]$ met $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. MATLAB: $A + B$
Het *scalaire product* rA van een reëel getal r en A is de matrix $C = [c_{ij}]$ met $c_{ij} = ra_{ij}$. MATLAB: $r * A$
Het *verschil* $A - B$ is de som van A en $(-1)B$. MATLAB: $A - B$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -15 \\ 12 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad A + B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen van matrixoptelling

Stelling

Als A, B en C matrices van gelijke afmetingen $(m \times n)$ zijn, dan geldt

(a) $A + B = B + A$ *(optelling commutatief)*

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(optelling associatief)*

(c) *Er bestaat een unieke $m \times n$ matrix O, de* nulmatrix *waarvoor geldt:* $A + O = A$ *(O is* neutraal *mbt matrixoptelling).* *Elk element van O is* 0.

(d) *Er bestaat een unieke matrix D, de* tegengestelde *van A waarvoor geldt $A + D = O$, namelijk $D = (-1)A$, notatie: $-A$.*

(e) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenschappen van scalaire vermenigvuldiging

Stelling

Als A en B matrices zijn van gelijke afmetingen en r en s reële getallen, dan geldt

(a) $r(sA) = (rs)A$

(b) $(r+s)A = rA + sA$

(c) $r(A+B) = rA + rB$

(d) $(rA)^T = rA^T$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2(3A) = 2\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 6 & -9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 18 \\ 12 & -18 & 24 \end{bmatrix} = 6A$$

Inproduct van vectoren

Definitie

Het *inproduct* van twee n-vectoren

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

is gedefiniëerd als

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Notatie: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

MATLAB: dot(a, b)

Voorbeeld

Het inproduct van de 4-vectoren

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ is

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 2 - 6 - 6 + 4 = -6$$

Matrix-vector product

Het *product* $A\mathbf{u}$ van een $m \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ en een n-vector $\mathbf{u}$ is de m-vector gedefinieerd door

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1^T} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{a_2^T} \cdot \mathbf{u} \\ \cdots \\ \mathbf{a_m^T} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix},$$

waarbij $\mathbf{a_i}$ de i-de rij van A voorstelt. Dwz het i-de element van het product $A\mathbf{u}$ is gelijk aan het inproduct van de i-de rij van A (getransponeerd) met de vector $\mathbf{u}$.

MATLAB: $A * u$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

NB: het product $A\mathbf{u}$ is alleen gedefinieerd als het aantal kolommen van A hetzelfde is als de afmeting van $\mathbf{u}$ (A is een $m \times n$ matrix en $\mathbf{u}$ is een n-vector).

Lineair stelsel als matrix-vector product

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\ 3x_1 & & & & & - & 2x_4 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \end{array}$$

kan geschreven worden als $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrixproduct

Definitie

Het *product* AB van een $m \times p$ matrix $A = [a_{ij}]$ en een $p \times n$ matrix $B = [b_{ij}]$ is de $m \times n$ matrix

$$AB = \left[\begin{array}{cccc} A\mathbf{b_1} & A\mathbf{b_2} & \cdots & A\mathbf{b_n} \end{array}\right],$$

waarbij $\mathbf{b_j}$ de j-de kolom van B voorstelt.

NB: de j-de kolom van de matrix AB is dus het product van A en de j-de kolom van B.

MATLAB: $A * B$

NB: het ij-de element van de matrix AB is dus het inproduct van de i-de rij van A (getransponeerd) en de j-de kolom van B.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Noem $AB = [c_{ij}]$, dan bijvoorbeeld

$$c_{23} = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 0 \cdot 5 = 8 + 18 + 0 = 26$$

NB: het product AB is alleen gedefinieerd als het aantal kolommen van A hetzelfde is als het aantal rijen van B. A is 2×3 en B is 3×4

BA is niet gedefinieerd want B is 3×4 en A is 2×3.

Eigenschappen van matrixvermenigvuldiging

AB en BA hebben alleen dezelfde afmetingen als A en B vierkant zijn.
NB: matrixvermenigvuldiging is niet commutatief: zelfs als AB en BA gelijke afmetingen hebben hoeft AB niet gelijk te zijn aan BA!

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

dus $AB \neq BA$

Eigenschappen van matrixvermenigvuldiging

Stelling

Als A, B en C matrices zijn (van de juiste afmetingen)

(a) $A(BC) = (AB)C$ *(vermenigvuldiging associatief)*

(b) $(A + B)C = AC + BC$ *(rechts distributief)*

(c) $A(B + C) = AB + AC$ *(links distributief)*

(e) $(AB)^T = B^T A^T$

Bewijs van (e): Het inproduct van de i-de rij van A met de j-de kolom van B is gelijk aan het inproduct van de j-de rij van B^T met de i-de kolom van A^T.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \qquad (AB)^T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = B^T A^T$$

NB: $A^T B^T$ is een 3×3 matrix en dus zeker niet gelijk aan $(AB)^T$.

Verschillen tussen matrixvermenigvuldiging en vermenigvuldiging van reëele getallen

1. AB hoeft niet gelijk te zijn aan BA.
2. AB kan gelijk zijn aan O, terwijl $A \neq O$ en $B \neq O$.
3. AB kan gelijk zijn aan AC, terwijl $B \neq C$ en $A \neq O$.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inproduct als matrixproduct

Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ twee n-vectoren zijn, dan is hun inproduct $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ gelijk aan het matrixproduct $\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{v}$.

Voorbeeld

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 6 - 6 + 4 = -6 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Definitie

Een *lineaire combinatie* van de $m \times n$ matrices $A_1, A_2, \ldots, A_k$ is een uitdrukking van de vorm

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k$$

waarbij $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *coëfficiënten* genoemd worden.
Een compactere schrijfwijze voor bovenstaande lineaire combinatie is

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i$$

Matrix-vector product als lineaire combinatie

Als A een $m \times n$ matrix is en $\mathbf{a_j}$ de j-de kolom van A (een m-vector), dan geldt voor het matrixproduct van A met de n-vector

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

dat dit de volgende lineaire combinatie is van de kolommen van A:

$$A\mathbf{c} = c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + \cdots + c_n\mathbf{a_n} = \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{a_j}$$

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Lineair stelsel als lineaire combinatie met onbekende coëfficiënten

Het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan geschreven worden als

$$x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \cdots + x_n\mathbf{a_n} = \mathbf{b},$$

waarbij $\mathbf{a_j}$ de j-de kolom van A voorstelt.

NB: er bestaat dus een oplossing $\mathbf{x}$ voor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan en slechts dan als $\mathbf{b}$ een lineaire combinatie is van de kolommen van A.

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & & & - & x_3 & & & = 0 \\ 3x_1 & & & & & - & 2x_4 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = 0 \end{array}$$

kan geschreven worden als

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De oplossing $x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 4,\ x_4 = 6$ van het stelsel correspondeert met de lineaire combinatie

$$4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

die de nulvector oplevert.