Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 10

Inhoud

1. Lineaire transformaties
2. Matrix van een lineaire operator
3. Gelijksoortigheid (similarity)

Lineaire transformaties

Definitie

Laten V en W vectorruimten zijn. Een functie $L : V \to W$ heet een *lineaire transformatie* van V naar W als

(a) $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ voor alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in V.

(b) $L(c\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u})$ voor alle $\mathbf{u}$ in V en c in $\mathbb{R}$.

Als $V = W$ dan heet een lineaire transformatie van V naar W ook wel een *lineaire operator* op V.

Stelling

$L : V \to W$ is een lineaire transformatie dan en slechts dan als

$$L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$$

voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Dan kunnen we m.b.v. A een functie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ definiëren (een *matrix transformatie*):

$$L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

Dit is een lineaire transformatie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vanwege de matrix-rekenregels

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

$$A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$$

Voorbeeld

Rotatie (tegen de klok in) over een hoek ϕ van een vector in $\mathbb{R}^2$ is de functie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Dit is een lineaire transformatie, want een matrixtransformatie.

Voorbeeld

Laat $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3u_1 \\ u_1 + u_2 \\ 2u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

Dit is een lineaire transformatie, want een matrixtransformatie:

$$L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} \text{ voor de matrix } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

De identiteits transformatie $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}$ op $\mathbb{R}^n$ gegeven door

$$\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

is een lineaire operator want een matrixtransformatie met matrix I_n.

Voorbeeld

Definieer $L : P_3 \to P_2$ door $L(p(t)) = p'(t)$. Dan is L lineair, want

$$L(ap(t)+bq(t)) = (ap(t)+bq(t))' = ap'(t)+bq'(t) = aL(p(t))+bL(q(t))$$

Voorbeeld

Definieer $L : P_1 \to P_2$ door $L(p(t)) = (p(t))^2$. Dan is L niet lineair, want

$$L(t+t) = (2t)^2 = 4t^2 \neq t^2 + t^2 = L(t) + L(t)$$

Voorbeeld

Laat $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd zijn door $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4 \\ u_1 + u_2 \\ 2u_2 - u_3 \end{bmatrix}$.

Is L lineair? Voor $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ geldt

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(u_1 + v_1) + 4 \\ (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ 2(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) \end{bmatrix}$$

$$L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 4 \\ u_1 + u_2 \\ 2u_2 - u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3v_1 + 4 \\ v_1 + v_2 \\ 2v_2 - v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_1 + 3v_1 + 8 \\ u_1 + u_2 + v_1 + v_2 \\ 2u_2 - u_3 + 2v_2 - v_3 \end{bmatrix}$$

Deze uitdrukkingen zijn niet (altijd) gelijk: als $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ en $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ bijvoorbeeld niet. $L(\mathbf{0} + \mathbf{0}) \neq L(\mathbf{0}) + L(\mathbf{0})$, dus niet lineair.

Stelling

Laat $L : V \to W$ een lineaire transformatie zijn. Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ een basis zijn voor V. Dan is $L(\mathbf{v})$ volledig bepaald door $\{L(\mathbf{v_1}), L(\mathbf{v_2}), \ldots, L(\mathbf{v_n})\}$ voor elke $\mathbf{v}$ in V.

Bewijs: Schrijf $\mathbf{v}$ op de basis S:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots a_n\mathbf{v_n}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots a_n\mathbf{v_n}) \\ &= L(a_1\mathbf{v_1}) + L(a_2\mathbf{v_2}) + \cdots L(a_n\mathbf{v_n}) \\ &= a_1 L(\mathbf{v_1}) + a_2 L(\mathbf{v_2}) + \cdots a_n L(\mathbf{v_n}) \end{aligned}$$

Voorbeeld

Neem de standaard basis $S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ voor $\mathbb{R}^3$, met

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Laat $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie zijn met

$$L(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ L(\mathbf{v_2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ L(\mathbf{v_3}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dan kunnen we $L(\mathbf{v})$ met $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ als volgt berekenen:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3}$$

$$L(\mathbf{v}) = L(2\mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3}) = 2L(\mathbf{e_1}) - 3L(\mathbf{e_2}) + 5L(\mathbf{e_3}) = \begin{bmatrix} -9 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld

Neem de basis $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ voor $\mathbb{R}^3$, met

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Laat $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie zijn met

$$L(\mathbf{v_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ L(\mathbf{v_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ L(\mathbf{v_3}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Dan kunnen we $L(\mathbf{v})$ met $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ als volgt berekenen:

$$\mathbf{v} = 5\mathbf{v_1} - 8\mathbf{v_2} + 5\mathbf{v_3}$$

$$L(\mathbf{v}) = 5L(\mathbf{v_1}) - 8L(\mathbf{v_2}) + 5L(\mathbf{v_3}) = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Stelling

Laat $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *een lineaire transformatie zijn en* $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ *de standaardbasis voor* $\mathbb{R}^n$*. Laat* A *de* $m \times n$ *matrix zijn waarvan de* j*-de kolom gelijk is aan* $L(\mathbf{e_j})$*, voor* $j = 1, \ldots, n$*. Dan geldt voor elke* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbb{R}^n$ *dat*

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

A is de enige matrix met deze eigenschap, en wordt de standaard matrix representatie van L genoemd.

Bewijs: schrijf $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$. Dan geldt

$$L(\mathbf{x}) = x_1 L(\mathbf{e_1}) + x_2 L(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_n L(\mathbf{e_n})$$

ofwel in matrixnotatie:

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Voorbeeld

Laat $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire transformatie zijn gedefinieerd door:

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

De standaard matrixrepresentatie van L vinden we als volgt:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dus $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Stelling

Laten $L_1 : U \to V$ *en* $L_2 : V \to W$ *lineaire transformaties zijn. Dan is de samenstelling* $L_2 \circ L_1 : U \to W$ *gedefinieerd door*

$$L_2 \circ L_1(\mathbf{u}) = L_2(L_1(\mathbf{u}))$$

ook een lineaire transformatie.

Bewijs:

$$L_2(L_1(a\mathbf{u} + b\mathbf{v})) = L_2(aL_1(\mathbf{u}) + bL_1(\mathbf{v})) = aL_2(L_1(\mathbf{u})) + bL_2(L_1(\mathbf{v}))$$

Voorbeeld

een rotatie over een hoek ϕ gevolgd door een spiegeling in de x-as is een lineaire operator op $\mathbb{R}^2$

Stelling

voor $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *met standaard matrixrepresentatie* A *en* $L_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *met standaard matrixrepresentatie* B *heeft de samenstelling standaard matrixrepresentatie* BA

Bewijs:

$$L_2 \circ L_1(\mathbf{x}) = L_2(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

Voorbeeld

een rotatie over een hoek ϕ gevolgd door een spiegeling in de x-as is een lineaire operator op $\mathbb{R}^2$ met standaard matrixrepresentatie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$$

Matrix van een lineaire operator

Stelling

Laat $L : V \to V$ *een lineaire operator zijn op een n-dimensionale vectorruimte* V *en laat* $S = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *een geordende basis zijn voor* V. *Dan geldt voor de* $n \times n$ *matrix* A *met j-de kolom gelijk aan* $[L(\mathbf{v_j})]_S$ *dat*

$$[L(\mathbf{x})]_S = A[\mathbf{x}]_S \text{ voor elke } \mathbf{x} \text{ in } V$$

en A *is de enige matrix met deze eigenschap.*

Definitie

A heet de *representatie* van L ten opzichte van de geordende basis S.

Voorbeeld

Definieer $L : P_3 \rightarrow P_3$ door $L(p(t)) = p'(t)$. Neem de (standaard)basis $S = \{t^3, t^2, t, 1\}$ van P_3.

$$\begin{aligned} L(t^3) &= 3t^2 \\ L(t^2) &= 2t \\ L(t) &= 1 \\ L(1) &= 0 \end{aligned}$$

De representatie van L ten opzichte van S is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[vervolg] Kies een vector $\mathbf{x}$ in P_3

$$\mathbf{x} = p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ dus } A[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{bmatrix}$$

$$L(\mathbf{x}) = p'(t) = 3at^2 + 2bt + c$$

$$[L(\mathbf{x})]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{bmatrix}$$

dus inderdaad geldt

$$[L(\mathbf{x})]_S = A[\mathbf{x}]_S$$

Dus: elke lineaire operator op een vectorruimte van dimensie n kan beschouwd worden als een matrixtransformatie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Analoog kan een lineaire afbeelding $V \to W$ met $\dim V = n$ en $\dim W = m$ opgevat worden als matrixtranformatie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

NB1: de eerder gedefinieerde standaardrepresentatie van een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is de representatie van L ten opzichte van de standaardbasis voor $\mathbb{R}^n$.

NB2: Als L gelijk is aan de identiteits-operator I_V, dan is de matrixrepresentatie van L ten opzichte van elke basis S gelijk aan de eenheidsmatrix I.

Voorbeeld

Definieer $L : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ door

$$L([\ u_1 \quad u_2 \quad u_3\ ]) = [\ 2u_1 - u_3 \quad u_1 + u_2 - u_3 \quad u_3\ ].$$

Dit is een lineaire operator, en er geldt:

$$\begin{array}{rcl} L([\ 1 \quad 0 \quad 0\ ]) & = & [\ 2 \quad 1 \quad 0\ ] \\ L([\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]) & = & [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ] \\ L([\ 0 \quad 0 \quad 1\ ] & = & [\ -1 \quad -1 \quad 1\ ]. \end{array}$$

De representatie van L ten opzichte van de standaardbasis $S = \{[\ 1 \quad 0 \quad 0\ ], [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ], [\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]\}$ van $\mathbb{R}_3$ is dus de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[vervolg] Definieer weer $L : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ door

$$L([\ u_1 \quad u_2 \quad u_3\ ]) = [\ 2u_1 - u_3 \quad u_1 + u_2 - u_3 \quad u_3\ ].$$

Laat $T = \{[\ 1 \quad 0 \quad 1\ ], [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ], [\ 1 \quad 1 \quad 0\ ]\}$ een andere basis voor $\mathbb{R}_3$ zijn. Er geldt:

$$\begin{array}{rcl} L([\ 1 \quad 0 \quad 1\ ]) & = & [\ 1 \quad 0 \quad 1\ ] \\ L([\ 0 \quad 1 \quad 0\ ]) & = & [\ 0 \quad 1 \quad 0\ ] \\ L([\ 1 \quad 1 \quad 0\ ] & = & [\ 2 \quad 2 \quad 0\ ] = 2[\ 1 \quad 1 \quad 0\ ] \end{array}$$

De representatie van L ten opzichte van de basis T is de diagonaalmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gelijksoortigheid (similarity)

Stelling

Laat $L : V \to V$ een lineaire operator zijn op een n-dimensionale vectorruimte V met geordende bases $S = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ en laat P de overgangsmatrix zijn van T naar S. Als A de representatie van L is ten opzichte van S, dan is $P^{-1}AP$ de representatie van L ten opzichte van T.

Bewijs: A representeert L ten opzichte van S dus

$$[L(\mathbf{x})]_S = A[\mathbf{x}]_S.$$

P is de overgangsmatrix van T naar S dus P^{-1} is de overgangsmatrix van S naar T:

$$[\mathbf{x}]_S = P[\mathbf{x}]_T \text{ en } [\mathbf{y}]_T = P^{-1}[\mathbf{y}]_S$$

Kortom:

$$[L(\mathbf{x})]_T = P^{-1}[L(\mathbf{x})]_S = P^{-1}A[\mathbf{x}]_S = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_T$$

Definitie

Als A en B $n \times n$ matrices zijn, dan heten A en B *gelijksoortig* als er een niet-singuliere matrix P bestaat zodat

$$B = P^{-1}AP$$

Stelling

Laat V een n-dimensionale vectorruimte zijn, en A en B twee $n \times n$ matrices. A en B zijn gelijksoortig dan en slechts dan als ze dezelfde lineaire transformatie $L : V \to V$ representeren ten opzichte van twee verschillende geordende bases voor V.

Voorbeeld

Definieer $L : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ door

$$L(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2u_1 - u_3 & u_1 + u_2 - u_3 & u_3 \end{bmatrix}.$$

Dit is een lineaire operator, en de representatie ten opzichte van de standaardbasis $S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}$ in $\mathbb{R}_3$ is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laat $T = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\}$ een andere basis voor $\mathbb{R}_3$ zijn. De overgangsmatrix van T naar S is

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ zodat } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[vervolg] De representatie van L ten opzichte van de basis T is de diagonaalmatrix

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A en B zijn gelijksoortig.

Opgave

De functie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat L een lineaire transformatie is.

(b) Geef de matrixrepresentatie A van L ten opzichte van de standaard basis S van $\mathbb{R}^3$.

(c) Geef de matrixrepresentatie B van L ten opzichte van de onderstaande basis T van $\mathbb{R}^3$.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Geef een inverteerbare matrix P waarvoor geldt dat $B = P^{-1}AP$.

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

(b) Geef de matrixrepresentatie A van L ten opzichte van de standaard basis S van $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Geef de matrixrepresentatie B van L ten opzichte van de onderstaande basis T van $\mathbb{R}^3$.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Geef een inverteerbare matrix P waarvoor geldt dat $B = P^{-1}AP$.

$$P = P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$