Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 11

Inhoud

Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie

Laat $L : V \to V$ een lineaire operator op een vectorruimte V zijn. Een reëel getal λ heet een *eigenwaarde* van L als er een **niet-nul** vector $\mathbf{x}$ in V is zodat

$$L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}.$$

Elke niet-nul vector $\mathbf{x}$ die aan deze gelijkheid voldoet heet een *eigenvector* van L *bij de eigenwaarde λ.*

NB: een eigenvector van L wordt dus door L afgebeeld op een veelvoud van zichzelf.
NB:

$$L(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$$

voor elke willekeurige λ. De nulvector wordt geen eigenvector genoemd.

Voorbeeld

Laat $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling in de x-as zijn gegeven door

$$L(\mathbf{x}) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ is een eigenvector bij eigenwaarde } \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ is een eigenvector bij eigenwaarde } \lambda = -1$$

Voorbeeld

Laat V de (oneindig-dimensionale) vectorruimte zijn van alle oneindig vaak differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Laat $L : V \to V$ de lineaire operator zijn gedefinieerd door

$$L(f) = f'$$

Wat zijn de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van deze operator L?

Los op:

$$f' = \lambda f \qquad \text{ofwel} \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda y$$

Antwoord: eigenwaarden zijn alle λ in $\mathbb{R}$. De eigenvectoren bij een specifieke eigenwaarde λ zijn alle functies f van de vorm

$$f(x) = Ke^{\lambda x}$$

met K een constante in $\mathbb{R}$ ongelijk aan nul.

Definitie

Laat A een vierkante matrix zijn Als voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$ en vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ geldt dat $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dan heet λ een *eigenwaarde* van de matrix A en $\mathbf{x}$ een *eigenvector* bij de eigenwaarde λ.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$ is een eigenwaarde van A en $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = 3$, want

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Evenzo is $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ een eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = -1$.

Karakteristieke vergelijking

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \text{ geeft } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dus

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & \lambda x_1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & = & \lambda x_2 \end{array} \quad \text{ofwel} \quad \begin{array}{rcrcr} (\lambda-1)x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (\lambda-4)x_2 & = & 0 \end{array}$$

Dit homogene systeem $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft een niet-triviale oplossing dan en slechts dan als de coëfficiëntenmatrix $\lambda I - A$ determinant 0 heeft:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

ofwel

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Dus $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 3$ zijn de eigenwaarden.

Om de eigenvectoren te vinden vullen we achtereenvolgens $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$ in in het homogene stelsel $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \end{array} \text{ respectievelijk } \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$

Dit geeft de algemene oplossing

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ voor } \lambda = 2 \text{ en } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ voor } \lambda = 3$$

Dus $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde $\lambda_1 = 2$ en $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ is een eigenvector bij eigenwaarde $\lambda_2 = 3$.

Definitie

Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Dan is het karakteristieke polynoom $p(\lambda)$ van A per definitie gelijk aan

$$p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A)$$

De vergelijking

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 \text{ ofwel } p(\lambda) = 0$$

heet de karakteristieke vergelijking van A.

NB: het karakteristieke polynoom heeft graad n, en de coëfficiënt van λ^n in dit polynoom is 1:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

NB: voor de constante term geldt $a_n = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Het karakteristieke polynoom van A is

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + (-2\lambda + 10 - 4) - 4(2 - \lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

MATLAB: poly(A) geeft de coëfficiënten van het karakteristiek polynoom van matrix A. (Dus in het voorbeeld $1 \ -6 \ 11 \ -6$)

Stelling

Laat A een vierkante matrix zijn. De eigenwaarden van A zijn de wortels (=nulpunten) van het karakteristieke polynoom van A.

Bewijs:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Er bestaat een oplossing $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ van dit homogene stelsel dan en slechts dan als

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = 0.$$

NB: de eigenvectoren bij eigenwaarde λ zijn alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ die een oplossing zijn van $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Dus de eigenwaarden van A zijn $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

NB: **geheeltallige** wortels van een polynoom zijn delers van de constante term. Bijvoorbeeld $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ heeft mogelijke geheeltallige wortels ± 1, ± 2, ± 3 (de delers van -6). We vinden door invullen dat $\lambda = 1$ inderdaad een wortel is en kunnen dan alvast de factor $(\lambda - 1)$ afsplitsen.

Stelling

Als A een vierkante driehoeksmatrix is (bovendriehoeksmatrix, onderdriehoeksmatrix of diagonaalmatrix) dan zijn de eigenwaarden van A de diagonaalelementen.

Bewijs: de determinant van een driehoeksmatrix is het product van de diagonaalelementen.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 3 & -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

dus A heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 2$.

Definitie

De *eigenruimte* bij eigenwaarde λ van een matrix A is de oplossingsverzameling van het homogene stelsel

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

NB: Dus de eigenruimte bij eigenwaarde λ bestaat uit alle eigenvectoren bij λ plus de nulvector.

NB: De eigenruimte bij eigenwaarde λ van een $n \times n$ matrix A is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$: de nulruimte van matrix $\lambda I - A$.

Voorbeeld [vervolg]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix},\ p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Een eigenvector $\mathbf{x_1}$ bij $\lambda_1 = 1$ vinden we door $\lambda = 1$ in te vullen in de coëfficiëntenmatrix van het stelsel $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$[I - A|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De algemene oplossing is $\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ voor $r \in \mathbb{R}$, dus de vector

$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (neem $r = 2$) is een eigenvector bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 1$.

De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is span $\{\mathbf{x_1}\}$

Voorbeeld [vervolg]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix},\ p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Evenzo is de vector $\mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ een eigenvector bij de eigenwaarde $\lambda_2 = 2$ en is span $\{\mathbf{x_2}\}$ de eigenruimte bij $\lambda_2 = 2$.

Evenzo is de vector $\mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ een eigenvector bij de eigenwaarde $\lambda_3 = 3$ en is span $\{\mathbf{x_3}\}$ de eigenruimte bij $\lambda_3 = 3$.

Procedure voor het bepalen van de eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix A

1. Bepaal de wortels van het polynoom

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

   Dit zijn de eigenwaarden van A.
   MATLAB: roots(poly(A)) of simpelweg eig(A)

2. Vind voor elke gevonden eigenwaarde λ de niet-triviale oplossingen van het homogene systeem

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

   Dit zijn de eigenvectoren van A bij de eigenwaarde λ.
   MATLAB: rref($\lambda * \text{eye}(n) - A$)

Mogelijk heeft een matrix geen **reële** eigenwaarden (karakteristiek polynoom heeft alleen complexe wortels).

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

NB: Natuurlijk kan een matrix ook reële **en** complexe eigenwaarden hebben. Bijvoorbeeld als $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$.
Om eigenvectoren bij complexe eigenwaarden uit te rekenen moet je rekenen in een *complexe vectorruimte:* de constanten (scalairen) komen dan uit $\mathbb{C}$ i.p.v $\mathbb{R}$. Een voorbeeld van een vector in $\mathbb{C}^2$ is $\begin{bmatrix} 1+i \\ 3-2i \end{bmatrix}$.

Diagonalisatie en gelijksoortige matrices

Definitie

Laat $L : V \to V$ een lineaire operator op een n-dimensionale vectorruimte V zijn. Dan heet L *diagonaliseerbaar* als er een basis S voor V bestaat zodanig dat de representatie van L ten opzichte van de basis S een diagonaalmatrix is.

Voorbeeld

$$L([\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}]) = [\begin{array}{ccc} 2u_1 - u_3 & u_1 + u_2 - u_3 & u_3 \end{array}].$$

Deze lineaire operator op $\mathbb{R}_3$ is diagonaliseerbaar, want heeft representatie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ten opzichte van de basis $T = \{[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array}], [\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array}], [\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \end{array}]\}$.

Voorbeeld [vervolg]

De representatie van L ten opzichte van de standaardbasis in $\mathbb{R}_3$ is de matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A en B zijn gelijksoortig, er geldt:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Stelling

Gelijksoortige matrices hebben dezelfde eigenwaarden.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = p_B(\lambda).$$

De eigenwaarden van een lineaire operator L zijn de eigenwaarden van een (willekeurige) matrix die L representeert.

Definitie

Een vierkante matrix A heet diagonaliseerbaar als A gelijksoortig is met een diagonaalmatrix.

Stelling

Een $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als hij n lineair onafhankelijke eigenvectoren heeft.

Want: $P^{-1}AP = D$ een diagonaalmatrix $\Leftrightarrow$ de getallen op de diagonaal van D zijn eigenwaarden van A en de kolommen van P zijn (lineair onafhankelijke) eigenvectoren van A bij die eigenwaarden.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 3$ met bijbehorende eigenvectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Deze zijn geen veelvoud van elkaar, dus lineair onafhankelijk. Dus A is diagonaliseerbaar en gelijksoortig met de diagonaalmatrix

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ met } p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

De enige eigenwaarde is $\lambda = 1$. De eigenruimte bij eigenwaarde 1 is de nulruimte van

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze heeft dimensie 1 en wordt opgespannen door de eigenvector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, want de algemene oplossing van het homogene stelsel is $x_2 = 0$, $x_1 = r \in \mathbb{R}$.

Er zijn geen twee lineair onafhankelijke eigenvectoren en A is dus niet diagonaliseerbaar.

Stelling

Eigenvectoren bij **verschillende** *eigenwaarden zijn lineair onafhankelijk.*

Gevolg: Als de wortels van het karakteristiek polynoom van matrix A allemaal verschillend zijn dan is A diagonaliseerbaar.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Dus de eigenwaarden van A zijn $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Deze zijn alledrie verschillend, dus A is diagonaliseerbaar. A is gelijksoortig met

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Als de eigenwaarden van de matrix A niet allemaal verschillend zijn, kan A wel of niet diagonaliseerbaar zijn.

Definitie

De (algebraïsche) multipliciteit van een eigenwaarde λ_i is het aantal factoren $\lambda - \lambda_i$ in het karakteristiek polynoom $p(\lambda)$. Dus als

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de verschillende eigenwaarden van A, dan zijn $k_1, k_2, \ldots k_r$ de bijbehorende multipliciteiten.

Voorbeeld

Als het karakteristiek polynoom van een (5×5) matrix gelijk is aan

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 4)^3$$

dan is $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ een eigenwaarde van multipliciteit 2 en $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -4$ een eigenwaarde van multipliciteit 3. Nader onderzoek is noodzakelijk om na te gaan of de matrix diagonaliseerbaar is.

Feit: dimensie van de eigenruimte E_{λ_i} bij eigenwaarde λ_i is altijd kleiner of gelijk aan de multipliciteit k_i van λ_i (en groter of gelijk aan 1).

Stelling

A is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als voor elke eigenwaarde λ_i met multipliciteit k_i geldt dat de eigenruimte bij λ_i ook dimensie k_i heeft.

Bewijs: Er zijn n lineair onafhankelijke eigenvectoren als

$$n = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \cdots + \dim E_{\lambda_r} \leq k_1 + k_2 + \cdots + k_r$$

De som van de multipliciteiten is n, de graad van $p(\lambda)$:

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n.$$

Dus diagonaliseerbaar als

$$\dim E_{\lambda_i} = k_i \text{ voor elke eigenwaarde } \lambda_i.$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

De eigenwaardes zijn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Eigenwaarde 0 heeft multipliciteit 1, en eigenwaarde 1 heeft multipliciteit 2. De eigenruimte bij eigenwaarde 1 is de nulruimte van

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze heeft dimensie 2 want de algemene oplossing van het homogene stelsel is $x_1 = 0$, $x_2 = r$, $x_3 = s$, $r, s \in \mathbb{R}$.
Er zijn twee lineair onafhankelijke eigenvectoren bij de eigenwaarde van multipliciteit 2 (en er is natuurlijk ook een eigenvector bij de eigenwaarde van multipliciteit 1), dus A is diagonaliseerbaar.

Procedure voor diagonalisatie van een matrix A

1. Bepaal het karakteristiek polynoom $p(\lambda)$ van A.
2. Vind de wortels van $p(\lambda)$. Dit zijn de eigenwaarden van A.
3. Vind voor elke eigenwaarde λ_i van multipliciteit k_i een basis van de nulruimte van de matrix $\lambda_i I - A$, de eigenruimte bij λ_i. Als voor een i de dimensie van deze eigenruimte minder is dan k_i, dan is A niet diagonaliseerbaar.
4. Neem P gelijk aan de matrix met als kolommen de n lineair onafhankelijke eigenvectoren bij de verschillende eigenwaarden gevonden bij 3. Dan is
$$D = P^{-1}AP$$
een diagonaalmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden van A, in volgorde corresponderend met de kolommen van P.

MATLAB: $[P, D] = \text{eig}(A)$ geeft zowel de (genormaliseerde) eigenvectoren in een matrix P als de eigenwaarden in een diagonaalmatrix D.