Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 12

Inhoud

Symmetrische matrices

Definitie

Een (vierkante) matrix A is symmetrisch als $A = A^T$.

Stelling

Als A een symmetrische matrix is, dan heeft A alleen reële eigenwaarden.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A \text{ is symmetrisch}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A \text{ is niet symmetrisch}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Stelling

Voor elke matrix zijn de eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk.

Voor symmetrische matrices geldt een sterkere uitspraak:

Stelling

Voor een symmetrische matrix zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden onderling orthogonaal.

Voorbeeld

De symmetrische matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ heeft eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (bij eigenwaarde 4), en } \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ (bij eigenwaarde } -1\text{)}$$

Deze twee eigenvectoren hebben inproduct 0.

Definitie

Een vierkante matrix P heet *orthogonaal* als P inverteerbaar is met

$$P^{-1} = P^T$$

Voorbeeld

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ en dus } P^T P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stelling

Een $n \times n$ matrix P is orthogonaal dan en slechts dan als zijn kolommen (rijen) een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ vormen.

Bewijs: kolommen orthonormaal vanwege $P^T P = I_n$;
rijen orthonormaal vanwege $PP^T = I_n$.

Stelling

Een $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als er een inverteerbare matrix P bestaat, met eigenvectoren van A als kolommen, zodat

$$P^{-1}AP$$

een diagonaalmatrix is, met eigenwaarden van A op de diagonaal.

Niet elke vierkante matrix is diagonaliseerbaar omdat soms

$$\dim E_\lambda < k_\lambda$$

voor een eigenwaarde λ met multipliciteit k_λ.
Voor een symmetrische matrix geldt voor elke eigenwaarde λ:

$$\dim E_\lambda = k_\lambda$$

en daarom:

Stelling

Elke symmetrische $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar.

Als A symmetrisch is kan bovendien de diagonaliserende matrix P speciaal gekozen worden omdat de verschillende eigenruimtes onderling orthogonaal zijn, en voor elke eigenruimte een orthonormale basis bestaat (Gram-Schmidt).

Stelling

Elke symmetrische $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar, en er bestaat een orthogonale matrix P, met eigenvectoren van A als kolommen, zodat

$$P^{-1}AP = P^TAP = D$$

een diagonaalmatrix is.

NB: (andersom) als A te diagonaliseren is mbv een orthogonale matrix P dan moet A symmetrisch zijn.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = -2$ is een eigenwaarde van multipliciteit 2. De eigenruimte bij $\lambda_1 = -2$ is de oplossingsruimte van het homogene stelsel $(-2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ met coëfficiëntenmatrix

$$-2I - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Een basis voor deze eigenruimte wordt gevormd door de vectoren $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Deze vectoren zijn niet orthogonaal.

Voorbeeld [vervolg]

Neem (Gram-Schmidt) $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{v_1}}{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1}} \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Na normeren vinden we een orthonormale basis voor de eigenruimte bij eigenwaarde -2 bestaande uit

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{w_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld [vervolg]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

$\lambda_2 = 4$ is een eigenwaarde van multipliciteit 1. De eigenruimte bij $\lambda = 4$ is de oplossingsruimte van het homogene stelsel $(4I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ met coëfficiëntenmatrix

$$4I - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Een basis is $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en dus is $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ een orthonormale basis voor deze eigenruimte.

Voorbeeld [vervolg]

Als we nu voor de matrix P nemen

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

dan geldt dat

$$P^{-1}AP = P^TAP = D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definitie

Een lineaire transformatie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heet een *isometrie* als het inproduct van twee vectoren behouden blijft onder L:

$$(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ voor alle } \mathbf{x} \text{ en } \mathbf{y} \text{ in } \mathbb{R}^n$$

NB: Een isometrie behoudt lengtes van vectoren en hoeken tussen vectoren.

Stelling

Een lineaire transformatie $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een isometrie dan en slechts dan als de standaard matrix-representatie van L een orthogonale matrix is.

Stelling

Als A een orthogonale matrix is dan is $\det(A)$ *gelijk aan* 1 *of* -1

NB: Dus een isometrie behoudt ook volume.

Voorbeeld

Rotatie over een hoek ϕ of een spiegeling in de x-as in de $\mathbb{R}^2$ zijn isometrieën.

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisatie van een symmetrische $n \times n$ matrix A

1. Bepaal het karakteristiek polynoom $p(\lambda)$ van A.
2. Vind de (reële) wortels van $p(\lambda)$. Dit zijn de eigenwaarden van A.
3. Vind voor elke eigenwaarde λ_i van multipliciteit k_i een orthonormale basis van de nulruimte van de matrix $\lambda_i I - A$, de eigenruimte bij λ_i. Voor elke i is de dimensie van deze eigenruimte gelijk aan k_i, want een symmetrische matrix is diagonaliseerbaar. Omdat eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal zijn vormen de orthonormale bases van de verschillende eigenruimtes samen een orthonormale basis van de hele ruimte $\mathbb{R}^n$.
4. Neem P gelijk aan de matrix met als kolommen de orthonormale basis van de $\mathbb{R}^n$ gevonden bij 3. Dan is P een orthogonale matrix (dus P^{-1} is eenvoudig te bepalen: $P^{-1} = P^T$) en

   $$D = P^{-1}AP = P^TAP$$

   is een diagonaalmatrix met op de diagonaal de eigenwaarden van A, in volgorde corresponderend met de kolommen van P.

MATLAB: $A = A^T$ dan geeft $[P, D] = eig(A)$ een orthogonale matrix P.

Vloeistofstroming door membranen

In cel 1 bevindt zich 40 milliliter, in cel 2 bevindt zich 5 milliliter vloeistof op tijdstip 0. Stroming van cel 1 naar cel 2 is evenredig met drie maal het volume van vloeistof in cel 1:

$$x_1'(t) = -3x_1(t)$$

Stroming uit cel 2 naar buiten is evenredig met twee maal het volume van vloeistof in cel 2:

$$x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

Wat zijn de volumes in cellen 1 en 2 op tijdstip t ($x_1(t)$ en $x_2(t)$)?
Antwoord: los een lineair stelsel differentiaalvergelijkingen op gegeven door een matrixvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ ofwel } \mathbf{x}' = Ax$$

De eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

zijn $\lambda_1 = -3$ en $\lambda_2 = -2$ met corresponderende eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en de matrix is A is diagonaliseerbaar: voor de matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ met } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

geldt

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Uit

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ volgt } P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}A\mathbf{x} = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{x}$$

ofwel

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$$

met $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$. Dit stelsel kunnen we oplossen:

$$\begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \text{ ofwel}$$

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -3u_1(t) \\ u_2'(t) &= -2u_2(t) \end{aligned}$$

Algemene oplossing:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= b_1 e^{-3t},\ b_1 \in \mathbb{R} \\ u_2(t) &= b_2 e^{-2t},\ b_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Algemene oplossing:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= b_1 e^{-3t}, \; b_1 \in \mathbb{R} \\ u_2(t) &= b_2 e^{-2t}, \; b_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Omdat $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$, geldt $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$, dus

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \text{ ofwel}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u_1(t) = b_1 e^{-3t} \\ x_2(t) &= -3u_1(t) + u_2(t) = -3b_1 e^{-3t} + b_2 e^{-2t} \end{aligned}$$

Uit de gegeven beginwaarden $x_1(0) = 40$ en $x_2(0) = 5$ volgt $b_1 = 40$ en $-3b_1 + b_2 = 5$ dus $b_2 = 125$. Kortom, de oplossing is

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 40e^{-3t} \\ x_2(t) &= -120e^{-3t} + 125e^{-2t} \end{aligned}$$

Lineaire stelsels differentiaalvergelijkingen

Definitie

Een *eerste orde homogeen lineair stelsel van differentiaalvergelijkingen* is een stelsel van de vorm

$$\begin{array}{rcrcrcccr} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{nn}x_n(t) \end{array}$$

waarbij de a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ gegeven constanten in $\mathbb{R}$ zijn. In matrix-notatie:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \text{ of } \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \text{ waarbij}$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ en } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Een *oplossing* van het systeem is een n-vector functie $\mathbf{x}(t)$ die aan alle differentiaalvergelijkingen voldoet. De verzameling van alle oplossingen is een lineaire deelruimte van de vectorruimte van differentieerbare reëelwaardige n-vector functies. Een *fundamenteel systeem* voor het stelsel is een basis $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ van deze oplossingsruimte. Dus elke oplossing $\mathbf{x}(t)$ van het stelsel is een lineaire combinatie van de n-vector functies in het fundamentele systeem:

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + b_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + b_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

met $b_1, \ldots, b_n$ constanten in $\mathbb{R}$. De *algemene oplossing* van het lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen is dus van de vorm

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + b_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + b_n\mathbf{x}^{(n)}(t),\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$$

Invullen van specifieke waarden voor $b_1, \ldots, b_n$ geeft een *particuliere oplossing* van het stelsel. In toepassingen is vaak sprake van een zogenaamd *beginwaarde probleem* :

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

met $\mathbf{x}_0$ een vaste n-vector van beginwaarden. De voorwaarde $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ heet een *beginvoorwaarde.* Een beginwaarde probleem komt gegeven een fundamenteel systeem $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ voor het stelsel neer op het oplossen van een onbekende vector $\mathbf{b}$ uit de matrixvergelijking:

$$C\mathbf{b} = \mathbf{x}_0,$$

waarbij

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

en C de matrix is met kolommen $\mathbf{x}^{(1)}(0), \mathbf{x}^{(2)}(0), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(0)$. Omdat de kolommen van C een fundamenteel systeem vormen is C niet-singulier dus is er een unieke oplossing voor $\mathbf{b}$.

Voorbeeld

Een enkele differentiaalvergelijking

$$x'(t) = ax(t), \quad \text{ofwel} \quad \frac{dx}{dt} = ax$$

heeft als algemene oplossing

$$x(t) = be^{at}, \; b \in \mathbb{R}.$$

Het beginwaarde probleem

$$x'(t) = ax(t), \; x(0) = x_0$$

heeft dus als oplossing (stel $t = 0$ in de algemene oplossing en vind zo b)

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

.

Het stelsel is *diagonaal* als de matrix A een diagonaalmatrix is. Het is dan eenvoudig op te lossen aangezien elke differentiaalvergelijking onafhankelijk van de andere opgelost kan worden.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

is equivalent met de drie differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 \\ x_2' &= -2x_2 \\ x_3' &= 4x_3 \end{aligned}$$

en de algemene oplossing $\mathbf{x}(t)$ is dus gelijk aan

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 e^{3t} \\ b_2 e^{-2t} \\ b_3 e^{4t} \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

Voorbeeld [vervolg]

De functies

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \ \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}, \ \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t},$$

vormen een fundamenteel systeem voor het diagonale stelsel. Met beginvoorwaarde $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vinden we $\begin{bmatrix} b_1 e^0 \\ b_2 e^0 \\ b_3 e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, dus $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ en de oplossing wordt

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{-2t} \\ 3e^{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

Stelling

Als de $n \times n$ matrix A n lineair onafhankelijke eigenvectoren $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ heeft bij de eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dan is de algemene oplossing van

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

gelijk aan

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{p_1}e^{\lambda_1 t} + b_2\mathbf{p_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_n\mathbf{p_n}e^{\lambda_n t}$$

Bewijs: Laat P de matrix zijn met kolommen $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$. Dan is

$$P^{-1}AP = D,$$

met D de diagonaalmatrix met $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ op de diagonaal. We vinden

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \Leftrightarrow P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}A\mathbf{x} = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{x} = D(P^{-1}\mathbf{x})$$

ofwel

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$$

met $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x}$ (dus $\mathbf{u}' = P^{-1}\mathbf{x}'$).

Het diagonale stelsel

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$$

heeft als oplossing

$$\mathbf{u}(t) = b_1\mathbf{u}^{(\mathbf{1})}(t) + b_2\mathbf{u}^{(\mathbf{2})}(t) + \cdots + b_n\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}(t)$$

met $b_1, b_2, \ldots, b_n$ willekeurige constanten in $\mathbb{R}$ en

$$\mathbf{u}^{(\mathbf{1})}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{u}^{(\mathbf{2})}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t},\ \ldots, \mathbf{u}^{(\mathbf{n})}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_n t},$$

een fundamenteel systeem voor het diagonale stelsel. Uit

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{u}(t) = b_1 P\mathbf{u}^{(\mathbf{1})}(t) + \cdots + b_n P\mathbf{u}^{(\mathbf{n})}(t)$$

leiden we af dat de algemene oplossing gelijk is aan

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{p_1}e^{\lambda_1 t} + b_2\mathbf{p_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_n\mathbf{p_n}e^{\lambda_n t}$$

met $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}$ de kolommen van P.

Voorbeeld

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Het karakteristiek polynoom van A is gelijk aan

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 14\lambda - 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

dus de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ met eigenvectoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix},$$

dus de algemene oplossing wordt gegeven door

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Voorbeeld [vervolg]

De algemene oplossing wordt gegeven door

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

De beginvoorwaarde is

$$x_1(0) = 4, x_2(0) = 6, x_3(0) = 8$$

We schrijven de algemene oplossing als $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ en vullen in $t = 0$:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 e^0 \\ b_2 e^0 \\ b_3 e^0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld [vervolg]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Oplossen van deze matrixvergelijking geeft $b_1 = \frac{4}{3}$, $b_2 = 3$, $b_3 = -\frac{1}{3}$.
De oplossing van het beginwaarde problem is dus

$$\mathbf{x}(t) = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} e^{4t}$$