Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 2

Inhoud

Rij-equivalentie

De drie soorten *elementaire rij-operaties* op matrices zijn

1. *Verwissel twee rijen van de matrix*
2. *Vermenigvuldig een rij met een constante ongelijk aan nul*
3. *Tel een veelvoud van een rij bij een andere rij op*

Definitie

Een matrix A heet *rij-equivalent* met een matrix B (notatie: $A \sim B$) als A overgaat in B na het toepassen van een eindige reeks elementaire rij-operaties.

NB: Als A en B uitgebreide matrices zijn van lineaire stelsels en $A \sim B$, dan hebben de stelsels dezelfde oplossingsverzameling (de stelsels zijn equivalent).

Een stelsel in rij echelon vorm (trapvorm)

Als de matrix in *trapvorm* is, kan men de oplossing van het bijbehorende stelsel direct aflezen.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

De oplossing volgt uit zogenaamde *achterwaartse substitutie:*

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= 2 - x_3 = 2 + 1 = 3 \\ x_1 &= 3 - 2x_2 - 2x_3 = 3 - 6 + 2 = -1 \end{aligned}$$

Elke matrix is rij-equivalent met een matrix in trapvorm waaruit de oplossing van het bijbehorende stelsel makkelijk kan worden afgelezen.

Trapvorm en gereduceerde trapvorm

Definitie

Een matrix is in *rij echelon vorm (trapvorm)* als aan de volgende voorwaarden voldaan is

1. Eventuele nulrijen staan allemaal onderin de matrix
2. Als een rij geen nulrij is, dan is het eerste niet-nul element van de rij een 1 (de *leidende* 1 van de rij).
3. In elke niet-nul rij staat de leidende 1 rechts van en onder leidende enen in voorgaande rijen.

Een matrix is in *gereduceerde rij echelon vorm (gereduceerde trapvorm)* als bovendien nog aan de volgende voorwaarde voldaan is

4. Als in een kolom een leidende 1 staat, dan zijn alle andere elementen in die kolom gelijk aan 0.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zijn in trapvorm, maar niet in gereduceerde trapvorm, terwijl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in gereduceerde trapvorm zijn.

Stelling

Elke matrix is rij-equivalent met een matrix in trapvorm.

Eliminatiemethode *(Gauss-eliminatie)* : Als $A = O$ dan klaar. Anders:
Stap 1. Vind de meest linkse kolom j die een niet-nul element bevat (de *pivot kolom*) en kies een niet-nul element in deze kolom: de *pivot* of *spil* a_{ij}.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Stap 2. Verwissel de rij van de pivot met de eerste rij: je krijgt matrix B met pivot $b_{1j} \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Stap 3. Deel de eerste rij van B door b_{1j}: je krijgt matrix C met pivot $c_{1j} = 1$.

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Stap 4. Tel rij 1 een geschikt aantal malen bij de overige rijen op: je krijgt matrix D met $d_{1j} = 1$ en $d_{hj} = 0$ voor alle $h \geq 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Stap 5. Laat de eerste rij van D weg en herhaal de procedure voor de matrix A_1 die je overhoudt.

$$\begin{bmatrix} \color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{-5} & \color{blue}{3} & \color{blue}{6} & \color{blue}{14} \\ 0 & 0 & \color{red}{-2} & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Stap 6. De matrix is nu in trapvorm. Om een gereduceerde trapvorm te krijgen (*Gauss-Jordan reductie*), doen we het volgende:
Vind de laatste niet-nul rij en tel deze een geschikt aantal maal op bij de rijen erboven om nullen te introduceren boven de leidende 1 van deze rij.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ga nu één rij omhoog en herhaal, totdat alle kolommen met een leidende 1 erin 'schoongeveegd' zijn.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De Gauss-Jordan reductie methode geeft de volgende stelling:

Stelling

Elke matrix is rij-equivalent met een matrix in gereduceerde trapvorm.

NB: de matrix in gereduceerde trapvorm is uniek.

MATLAB: rref(A) geeft je in één keer de unieke matrix in gereduceerde trapvorm (reduced row echelon form) die rij-equivalent is met A.

Gauss-eliminatie: achterwaartse substitutie

Voor het oplossen van een lineair stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met behulp van *Gauss-eliminatie* transformeren we de uitgebreide matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ naar een rij-equivalente gepartitioneerde matrix $[C \mid \mathbf{d}]$ in trapvorm, en lossen we het equivalente stelsel $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ op door middel van *achterwaartse substitutie* :

Voorbeeld

[unieke oplossing]

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = 2 - x_3 = 2 - 3 = -1$$

$$x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3 = 9 + 2 - 9 = 2$$

Voorbeeld

[oneindig veel oplossingen]

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

$$x_5 = r$$
$$x_4 = 9 - 2x_5 = 9 - 2r$$
$$x_3 = 7 - 2x_4 = 7 - 2(9 - x_5) - 3x_5 = -11 + r$$
$$x_2 = 7 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 + 5r$$
$$x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -1 - 10r$$

met $r \in \mathbb{R}$

NB: Kolommen zonder leidende 1 corresponderen met vrije variabelen.

Voorbeeld

[geen oplossing]

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

laatste rij: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ ofwel $0 = 1$

NB: Als een stelsel inconsistent is dan ontstaat er bij Gauss-eliminatie altijd een rij van de vorm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Voorbeeld

[nulrijen weglaten]

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

het bijbehorende stelsel is equivalent met het stelsel behorend bij

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 2 \end{array}\right]$$

dus parametervoorstelling van de oplossing:

$$\color{blue}{x_3 = r}$$

$$\color{red}{x_2} = 2 - 2r$$

$$\color{red}{x_1} = 0 - 3x_2 = -6 + 6r$$

met $\color{blue}{r \in \mathbb{R}}$

Voor het oplossen van een lineair stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met behulp van *Gauss-Jordan reductie* transformeren we de uitgebreide matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ naar een rij-equivalente gepartitioneerde matrix $[C \mid \mathbf{d}]$ in *gereduceerde* trapvorm, en lossen we het equivalente stelsel $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ eenvoudig op (zonder achterwaartse substitutie):

Voorbeeld

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$x_1 = 5$

$x_2 = 6$

$x_3 = 7$

$x_4 = 8$

Voorbeeld

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Druk variabelen corresponderend met leidende enen (gebonden variabelen) uit in de overige (vrije) variabelen:

$$x_1 = \tfrac{2}{3} - x_2 - 2x_3 + \tfrac{5}{2}x_5$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_5$$

Dus parametervoorstelling van de algemene oplossing:

$$x_1 = \tfrac{2}{3} - r - 2s + \tfrac{5}{2}t$$
$$x_2 = r$$
$$x_3 = s$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t$$
$$x_5 = t$$

met $r, s, t \in \mathbb{R}$

Voorbeeld

[vervolg] Parametervoorstelling van de algemene oplossing in vectornotatie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Homogene stelsels

Definitie

Een stelsel waarvan elke vergelijking rechterlid 0 heeft heet *homogeen.* Een homogeen stelsel is nooit strijdig, want $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ is een oplossing. Deze oplossing heet de *triviale* oplossing van het homogene stelsel. Elke andere oplossing heet een *niet-triviale* oplossing van het homogene stelsel.

Voorbeeld

Het volgende homogene stelsel in de variabelen x en y heeft alleen de triviale oplossing.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \end{array} \text{ geeft } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

dus

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 4x - 6y + z &= 0 \end{aligned}$$

$m = 2 < 3 = n$. Dit homogene stelsel heeft niet-triviale oplossingen, want twee vlakken door de oorsprong hebben minstens een snijlijn gemeen.

Stelling

Laat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een homogeen stelsel zijn van m vergelijkingen in n onbekenden. Als $m < n$ (er zijn meer variabelen dan vergelijkingen), dan heeft het stelsel een niet-triviale oplossing (zelfs oneindig veel).

Bewijs: Trapvorm $[B \mid \mathbf{0}]$ van $[A \mid \mathbf{0}]$ heeft hoogstens m leidende enen (gebonden variabelen), dus minstens $n - m > 0$ vrije variabelen.

Voorbeeld

$$[A \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

in gereduceerde trapvorm gebracht:

$$\text{rref}([A \mid \mathbf{0}]) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -s - t$

$x_2 = s$

$x_3 = -t$

$x_4 = 0$

$x_5 = t$, met $s, t \in \mathbb{R}$

Verband inhomogeen en homogeen stelsel

Als het stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ met } \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

een consistent stelsel is, en $\mathbf{x_p}$ is een oplossing, dan is voor elke oplossing $\mathbf{x_h}$ van het bijbehorende homogene stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ook $\mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$ een oplossing van het inhomogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Bewijs:

$$A(\mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}) = A\mathbf{x_p} + A\mathbf{x_h} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Gevolg: een stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen is inconsistent of heeft oneindig veel oplossingen

Voorbeeld

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

in gereduceerde trapvorm gebracht:

$$\mathrm{rref}([A \mid \mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\color{red}{x_1} = 3 - s - t$$

$$\color{blue}{x_2 = s}$$

$$\color{red}{x_3} = 2 - t$$

$$\color{red}{x_4} = 1$$

$$\color{blue}{x_5 = t}, \text{ met } \color{blue}{s, t} \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld

[vervolg] Parametervoorstelling van de algemene oplossing in vectornotatie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Hierin zijn een particuliere oplossing $\mathbf{x_p}$ en de algemene homogene oplossing $\mathbf{x_h}$ te herkennen:

$$\mathbf{x_p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x_h} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Speciale matrices

Een vierkante ($n \times n$) matrix $A = [a_{ij}]$ heet een *diagonaalmatrix* als $a_{ij} = 0$ voor alle $i \neq j$. Een *scalaire matrix* is een diagonaalmatrix waarvoor de elementen op de hoofddiagonaal alle gelijk zijn. Een *eenheidsmatrix* is een scalaire matrix met enen op de hoofddiagonaal. De $n \times n$ eenheidsmatrix wordt aangeduid met I_n.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A, B en I_3 zijn diagonaalmatrices, B en I_3 zijn scalaire matrices en I_3 is een eenheidsmatrix.

NB: voor elke $m \times n$ matrix A geldt dat $AI_n = A$ en $I_mA = A$.

De inverse

Definitie

Een vierkante $n \times n$ matrix A heet *inverteerbaar* of *niet-singulier* of *regulier* als er een $n \times n$ matrix B bestaat zodanig dat

$$AB = BA = I_n$$

Zo'n matrix B heet dan een *inverse* van A. Als A geen inverse heeft dan heet A *niet inverteerbaar* of *singulier.*

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Stelling

Als een matrix een inverse heeft is deze uniek.

Definitie

Als een matrix A een inverse heeft dan wordt deze (unieke) inverse aangeduid met A^{-1}.
MATLAB: inv(A)

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Stelling

(a) *Als A en B inverteerbaar zijn, dan is AB inverteerbaar en*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(b) *Als A inverteerbaar is dan is A^{-1} inverteerbaar en*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(c) *Als A inverteerbaar is dan is A^T inverteerbaar en*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ heeft inverse } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ heeft inverse } B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{dus } AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 26 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \text{ heeft inverse}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ \frac{7}{2} & -9 \end{bmatrix}$$

Stelling

Als A een inverteerbare $(n \times n)$ matrix is, dan heeft voor elke n-vector $\mathbf{b}$ het lineaire stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een unieke oplossing, namelijk $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Voor } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ geldt } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

dus de unieke oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ is

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Voor een inverteerbare matrix A gelden ook de volgende rekenregels:

- uit $AB = AC$ volgt $B = C$
- uit $AB = O$ volgt $B = O$.

Stelling

Als A en B $n \times n$ matrices zijn zodat $AB = I_n$, dan geldt ook $BA = I_n$ en dus $B = A^{-1}$.

NB: dus om aan te tonen dat $B = A^{-1}$ is het voldoende te laten zien dat $AB = I$ ofwel $BA = I$ (een van beide niet nodig)

Meerdere stelsels met dezelfde coëfficiëntenmatrix

Probleem: los op $A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}, A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}, \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{b_k}$

Oplossing: pas Gauss-Jordan reductie toe op de gepartitioneerde matrix $[A \mid \mathbf{b_1} \mid \mathbf{b_2} \mid \cdots \mid \mathbf{b_k}]$.

NB: Als A vierkant is onstaat door Gauss-Jordan reductie uit A ofwel een matrix met een nulrij, ofwel de eenheidsmatrix I.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan toepassen op

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 6 & 20 \end{array}\right] \text{ geeft } \left[\begin{array}{cc|r|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{array}\right]$$

dus $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -10 \\ 9 \end{bmatrix}$ is de oplossing van het eerste stelsel, terwijl $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ de oplossing van het tweede stelsel is.

Voorbeeld

Stel de inverse van

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ is gelijk aan de matrix } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Omdat voor de inverse geldt

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

moeten a, b, c, d voldoen aan

$$\begin{aligned} 3a + 5c &= 1 \\ a + 2c &= 0 \\ 3b + 5d &= 0 \\ b + 2d &= 1 \end{aligned}$$

Voorbeeld

[vervolg] ofwel

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Twee stelsels met dezelfde coëfficiëntenmatrix A. Gauss-Jordan reductie op de gepartitioneerde matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A \mid I_2]$$

geeft

$$\left[\begin{array}{cc|r|r} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

De inverse is dus

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Het bepalen van de inverse van een matrix

Inverse C van een $n \times n$ matrix A bepalen: los n stelsels op gegeven door $AC = I_n$.

Pas dus Gauss-Jordan reductie toe op de matrix

$$[A \mid \mathbf{e_1} \mid \mathbf{e_2} \mid \cdots \mid \mathbf{e_n}] = [A \mid I_n]$$

Stelling

Laat A een $n \times n$ matrix zijn. Als A inverteerbaar is, dan gaat

$$[A \mid I_n]$$

na Gauss-Jordan reductie over in

$$[I_n \mid A^{-1}].$$

Als A niet inverteerbaar is levert Gauss-Jordan op $[A \mid I_n]$ een nulrij links van de streep op (terwijl rechts minstens één niet-nul staat).

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\
\hline
1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\
0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1
\end{array}$$

Dus

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[Een singuliere matrix]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Een nulrij links betekent: A is niet rij-equivalent met I_3, dus niet inverteerbaar, ofwel singulier.

Stelling

Als A een vierkante $(n \times n)$ matrix is, dan zijn de volgende beweringen equivalent (ofwel alle waar, ofwel alle onwaar):

(a) *A is inverteerbaar (niet-singulier)*

(b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing*

(c) *A is rij-equivalent met I_n*

(d) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke n-vector $\mathbf{b}$.*

NB: alleen vierkante matrices kunnen inverteerbaar zijn!

NB: A singulier $\Leftrightarrow$ A rij-equivalent met een matrix met nulrij

Elementaire matrices

Definitie

Een $n \times n$ *elementaire matrix van type 1,2 of 3* is een matrix verkregen door één elementaire rij-operatie van type 1 (verwisselen rijen), type 2 (vermenigvuldigen met constante ongelijk nul), of type 3 (veelvoud van een rij optellen bij een andere rij) toe te passen op de eenheidsmatrix I_n.

Voorbeeld

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NB: E_1 is van type 1 (verwissel tweede en laatste rij van I_4), E_2 is van type 2 (vermenigvuldig tweede rij van I_2 met -3, en E_3 is van type 3 (tel 3 maal de laatste rij van I_3 bij de eerste op).
NB: Ook I_n zelf is een elementaire matrix (type 2)

Stelling

Stel matrix B wordt verkregen uit de $m \times n$ matrix A door één elementaire rij-operatie van type 1,2 of 3 toe te passen. Laat E de $(m \times m)$ elementaire matrix zijn die ontstaat door dezelfde elementaire rij-operatie op I_m toe te passen. Dan geldt:

$$B = EA.$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

Stelling

Twee $m \times n$ matrices A en B zijn rij-equivalent dan en slechts dan als er elementaire matrices $E_1, E_2, \ldots, E_K$ bestaan zodanig dat

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

Stelling

Een elementaire matrix is inverteerbaar, en zijn inverse is een elementaire matrix van hetzelfde type.

(Want bij elke elementaire rij-operatie hoort een 'omgekeerde' operatie van hetzelfde type die het effect van de eerste ongedaan maakt.
De elementaire matrix van de omgekeerde operatie is de gezochte inverse.)

Het bepalen van de inverse van een matrix (II)

Stelling

Als A inverteerbaar is, dus rij-equivalent met I:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I$$

dan is

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I$$

Gevolg: dezelfde rij-operaties die A transformeren naar I, transformeren I naar A^{-1}. Dus als A inverteerbaar is, kan A^{-1} bepaald worden door Gauss-Jordan reductie toe te passen op de gepartitioneerde matrix $[A \mid I]$. Zodra A (links) overgaat in I gaat I (rechts) over in A^{-1}:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 [A \mid I] = [E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A \mid E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I] = [I \mid A^{-1}]$$

Stelling

Als A een vierkante ($n \times n$) matrix is, dan zijn de volgende beweringen equivalent (ofwel alle waar, ofwel alle onwaar):

(a) *A is inverteerbaar (niet-singulier)*

(b) *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing*

(c) *A is rij-equivalent met I_n*

(d) *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke n-vector $\mathbf{b}$.*

(e) *A is een product van elementaire matrices.*

Bewijs van $(c) \Rightarrow (e)$:

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_n \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} I_n$$