Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 3

Inhoud

1. De determinant van een matrix
2. Eigenschappen van determinanten
3. Ontwikkeling naar een rij of kolom
4. Determinant en oppervlakte

Stelling

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

is inverteerbaar dan en slechts dan als $ad - bc \neq 0$ *en de inverse is dan*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Stelling

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

is inverteerbaar dan en slechts dan als $ad - bc \neq 0$ en de inverse is dan

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bewijs: Gauss-Jordan reductie op

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

geeft een nulrij als $ad - bc = 0$, anders krijg je

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

Stelling

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

is inverteerbaar dan en slechts dan als $ad - bc \neq 0$ *en de inverse is dan*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bewijs: Gauss-Jordan reductie op

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

geeft een nulrij als $ad - bc = 0$, anders krijg je

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

NB: het getal $ad - bc$ heet de *determinant* van de matrix A.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc = -2 \neq 0$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dus het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

dus het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

heeft als unieke oplossing

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determinanten

Definitie

Een *permutatie* van de verzameling $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ van gehele getallen is een rij $j_1 j_2 \cdots j_n$ waarin al deze getallen precies eenmaal voorkomen: $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Determinanten

Definitie

Een *permutatie* van de verzameling $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ van gehele getallen is een rij $j_1 j_2 \cdots j_n$ waarin al deze getallen precies eenmaal voorkomen: $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Voorbeeld

Er zijn 6 verschillende permutaties van $\{1, 2, 3\}$, namelijk

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

Determinanten

Definitie

Een *permutatie* van de verzameling $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ van gehele getallen is een rij $j_1 j_2 \cdots j_n$ waarin al deze getallen precies eenmaal voorkomen: $\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Voorbeeld

Er zijn 6 verschillende permutaties van $\{1, 2, 3\}$, namelijk

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

Voorbeeld

Als $S = \{1, 2, 3, 4\}$, dan is 4231 een permutatie van S. Deze permutatie komt overeen met de afbeelding $f : S \to S$ gedefinieerd door:

$$f(1) = 4,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3,\ f(4) = 1.$$

Stelling

Er zijn $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ *permutaties van* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Stelling

Er zijn $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ *permutaties van* $\{1,2,\dots,n\}$.

Definitie

De verzameling van alle $n!$ permutaties van $\{1,2,\dots,n\}$ duiden we aan met S_n.

Een permutatie $j_1 j_2 \cdots j_n$ heeft een *inversie* of *omkering* als j_r voor j_s staat in de rij (d.w.z. $r < s$) voor zekere j_r en j_s , terwijl $j_r > j_s$.

Stelling

Er zijn $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ *permutaties van* $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definitie

De verzameling van alle $n!$ permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ duiden we aan met S_n.

Een permutatie $j_1 j_2 \cdots j_n$ heeft een *inversie* of *omkering* als j_r voor j_s staat in de rij (d.w.z. $r < s$) voor zekere j_r en j_s , terwijl $j_r > j_s$.

Een permutatie heet *even* als hij in totaal een even aantal inversies heeft, en *oneven* als het aantal inversies oneven is.

Stelling

Er zijn $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ *permutaties van* $\{1,2,\ldots,n\}$.

Definitie

De verzameling van alle $n!$ permutaties van $\{1,2,\ldots,n\}$ duiden we aan met S_n.
Een permutatie $j_1 j_2 \cdots j_n$ heeft een *inversie* of *omkering* als j_r voor j_s staat in de rij (d.w.z. $r < s$) voor zekere j_r en j_s , terwijl $j_r > j_s$.
Een permutatie heet *even* als hij in totaal een even aantal inversies heeft, en *oneven* als het aantal inversies oneven is.

Voorbeeld

De permutatie 4231 van S_4 is oneven: er zijn vijf inversies in totaal want 4 gaat vooraf aan $2,3,1$, verder gaat 2 vooraf aan 1, en 3 aan 1.

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix. De *determinant* van A is per definitie

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

waar gesommeerd wordt over alle permutaties $j_1 j_2 \cdots j_n$ van $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ en een $+$ of een $-$ genomen wordt voor de term behorend bij de permutatie $j_1 j_2 \cdots j_n$ al naar gelang deze permutatie even $(+)$ of oneven $(-)$ is.
Notatie: $\det A$ of $|A|$

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix. De *determinant* van A is per definitie

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

waar gesommeerd wordt over alle permutaties $j_1 j_2 \cdots j_n$ van $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ en een $+$ of een $-$ genomen wordt voor de term behorend bij de permutatie $j_1 j_2 \cdots j_n$ al naar gelang deze permutatie even $(+)$ of oneven $(-)$ is.
Notatie: $\det A$ of $|A|$

Voorbeeld

Als $A = [a_{11}]$ een 1×1 matrix is, dan is $\det A = a_{11}$

Voorbeeld

Als

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

een 2×2 matrix is, dan is

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Voorbeeld

Als

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

een 2×2 matrix is, dan is

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Voorbeeld

Als

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

een 3×3 matrix is, dan is

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Eigenschappen van determinanten

Stelling

(a) *Als A een matrix is, dan is* $\det(A) = \det(A^T)$.

(b) *Als B een matrix is die uit A ontstaat door twee rijen (of kolommen) te verwisselen, dan is* $\det(B) = -\det(A)$

(c) *Als twee rijen (of kolommen) van A gelijk zijn, dan* $\det(A) = 0$.

(d) *Als A een nulrij (of nulkolom) bevat, dan* $\det(A) = 0$.

Eigenschappen van determinanten

Stelling

(a) *Als A een matrix is, dan is* $\det(A) = \det(A^T)$.

(b) *Als B een matrix is die uit A ontstaat door twee rijen (of kolommen) te verwisselen, dan is* $\det(B) = -\det(A)$

(c) *Als twee rijen (of kolommen) van A gelijk zijn, dan* $\det(A) = 0$.

(d) *Als A een nulrij (of nulkolom) bevat, dan* $\det(A) = 0$.

Bewijs (voor 3×3) van (a):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \; A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$\det A^T = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

De volgende stelling beschrijft de verandering van de determinant bij toepassen van elementaire rij-operaties (of elementaire kolom-operaties)

Stelling

1. *Als B uit A ontstaat door twee rijen (of kolommen) te verwisselen, dan* $\det(B) = -\det(A)$.
2. *Als B uit A ontstaat door een rij (of kolom) van A met een constante $k \neq 0$ te vermenigvuldigen, dan* $\det(B) = k \det(A)$.
3. *Als B uit A ontstaat door een veelvoud van een rij (kolom) van A bij een andere rij (kolom) van A op te tellen, dan* $\det(B) = \det(A)$.

De volgende stelling beschrijft de verandering van de determinant bij toepassen van elementaire rij-operaties (of elementaire kolom-operaties)

Stelling

1. *Als B uit A ontstaat door twee rijen (of kolommen) te verwisselen, dan* $\det(B) = -\det(A)$.
2. *Als B uit A ontstaat door een rij (of kolom) van A met een constante $k \neq 0$ te vermenigvuldigen, dan* $\det(B) = k\det(A)$.
3. *Als B uit A ontstaat door een veelvoud van een rij (kolom) van A bij een andere rij (kolom) van A op te tellen, dan* $\det(B) = \det(A)$.

Bewijs van 2. (vermenigvuldig rij r met k):

$$\det(B) = \sum(\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum(\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots k a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum(\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n} = k\det(A)$$

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0$$

Definitie

Een *bovendriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met onder de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i > j$.
Een *onderdriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met boven de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i < j$.

Definitie

Een *bovendriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met onder de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i > j$.
Een *onderdriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met boven de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i < j$.

NB: een diagonaalmatrix is per definitie zowel een bovendriehoeksmatrix als een onderdriehoeksmatrix.

Definitie

Een *bovendriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met onder de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i > j$.
Een *onderdriehoeksmatrix* is een vierkante matrix met boven de diagonaal nullen: $a_{ij} = 0$ voor $i < j$.

NB: een diagonaalmatrix is per definitie zowel een bovendriehoeksmatrix als een onderdriehoeksmatrix.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A is een bovendriehoeksmatrix, B is een onderdriehoeksmatrix, C is beide dus een diagonaalmatrix.

Stelling

De determinant van een boven- of onderdriehoeksmatrix is het product van de diagonaalelementen.

Stelling

De determinant van een boven- of onderdriehoeksmatrix is het product van de diagonaalelementen.

Bewijs: in een bovendriehoeksmatrix A is een term $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ van de determinant alleen ongelijk nul als $j_n \geq n, j_{n-1} \geq n-1, \ldots j_2 \geq 2, j_1 \geq 1$, dus als $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \ldots j_2 = 2, j_1 = 1$. Dus $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ is de enige term ongelijk nul.

Stelling

De determinant van een boven- of onderdriehoeksmatrix is het product van de diagonaalelementen.

Bewijs: in een bovendriehoeksmatrix A is een term $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ van de determinant alleen ongelijk nul als $j_n \geq n, j_{n-1} \geq n-1, \ldots j_2 \geq 2, j_1 \geq 1$, dus als $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \ldots j_2 = 2, j_1 = 1$. Dus $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ is de enige term ongelijk nul.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1)(5)(3) = 15$$

Stelling

De determinant van een boven- of onderdriehoeksmatrix is het product van de diagonaalelementen.

Bewijs: in een bovendriehoeksmatrix A is een term $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ van de determinant alleen ongelijk nul als $j_n \geq n, j_{n-1} \geq n-1, \ldots j_2 \geq 2, j_1 \geq 1$, dus als $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \ldots j_2 = 2, j_1 = 1$. Dus $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ is de enige term ongelijk nul.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (1)(5)(3) = 15$$

Voorbeeld

De determinant van de $n \times n$ eenheidsmatrix I_n is 1.

Determinant berekenen via reductie naar driehoeksvorm

Reduceer door middel van elementaire rij-operaties de matrix naar bovendriehoeksvorm. Elk van de gebruikte rij-operaties geeft een vermenigvuldigingsfactor voor de determinant. De diagonaalelementen van de matrix in bovendriehoeksvorm zijn de overige factoren van de determinant.

Determinant berekenen via reductie naar driehoeksvorm

Reduceer door middel van elementaire rij-operaties de matrix naar bovendriehoeksvorm. Elk van de gebruikte rij-operaties geeft een vermenigvuldigingsfactor voor de determinant. De diagonaalelementen van de matrix in bovendriehoeksvorm zijn de overige factoren van de determinant.

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(1)(-8)(-\frac{30}{4}) = -120.$$

Stelling

Een vierkante matrix A is niet-singulier (inverteerbaar) dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.

Stelling

Een vierkante matrix A is niet-singulier (inverteerbaar) dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.

Bewijs: Als A inverteerbaar is dan is A rij-equivalent met I dus

$$\det(A) = c \det(I) = c \cdot 1 = c \neq 0$$

voor een constante $c \neq 0$ afhankelijk van de rij-operaties die A overvoeren in I.

Stelling

Een vierkante matrix A is niet-singulier (inverteerbaar) dan en slechts dan als $\det(A) \neq 0$.

Bewijs: Als A inverteerbaar is dan is A rij-equivalent met I dus

$$\det(A) = c \det(I) = c \cdot 1 = c \neq 0$$

voor een constante $c \neq 0$ afhankelijk van de rij-operaties die A overvoeren in I.
Als A singulier is, dan is A rij-equivalent met een matrix B die een nulrij bevat en dus

$$\det(A) = c \det(B) = 0$$

(want $\det(B) = 0$).

Stelling

Als A en B vierkante matrices zijn, dan geldt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Stelling

Als A en B vierkante matrices zijn, dan geldt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bewijs: Als A singulier is, dan is ook AB singulier (want stel C is de inverse van AB, dan $(AB)C = A(BC) = I$ dus dan is A inverteerbaar met inverse BC, tegenspraak). Daarom geldt in dit geval

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B)$$

Stelling

Als A en B vierkante matrices zijn, dan geldt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bewijs: Als A singulier is, dan is ook AB singulier (want stel C is de inverse van AB, dan $(AB)C = A(BC) = I$ dus dan is A inverteerbaar met inverse BC, tegenspraak). Daarom geldt in dit geval

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A)\det(B)$$

Als A inverteerbaar is, dan is $\det(A) = c\det(I) = c$ voor een constante $c \neq 0$ die de rij-operaties 'codeert' die A overvoeren in I. Maar deze zelfde rij-operaties (product van elementaire matrices) voeren AB over in B. Daarom geldt

$$det(AB) = c\det(B) = \det(A)\det(B)$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix},\; AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1,\; \det(B) = -23,\; \det(AB) = -23$$

Gevolg: Als A inverteerbaar is, dan is $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, want

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Gevolg: Als A inverteerbaar is, dan is $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, want

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 9,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{9}$$

Gevolg: Als A inverteerbaar is, dan is $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, want

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 9,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{9}$$

NB: Er geldt *niet*: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

Gevolg: Als A inverteerbaar is, dan is $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, want

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 9,\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{9}$$

NB: Er geldt *niet*: $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ A+B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) + \det(B) = 8 + 8 = 16 \neq 0 = \det(A+B)$$

Stelling

De volgende uitspraken zijn equivalent voor een $n \times n$ matrix A:

1. *A is niet-singulier (inverteerbaar)*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*
3. *A is rij-equivalent met I_n.*
4. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ een unieke oplossing*
5. *A is een product van elementaire matrices*

Stelling

De volgende uitspraken zijn equivalent voor een $n \times n$ matrix A:

1. *A is niet-singulier (inverteerbaar)*
2. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*
3. *A is rij-equivalent met I_n.*
4. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ een unieke oplossing*
5. *A is een product van elementaire matrices*
6. $\det A \neq 0$.

Ontwikkeling naar een rij of kolom

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix zijn. Laat M_{ij} de $(n-1) \times (n-1)$ submatrix van A zijn verkregen door uit A de i-de rij en de j-de kolom weg te laten. De determinant $\det(M_{ij})$ heet de *minor* van matrixelement a_{ij}.

Ontwikkeling naar een rij of kolom

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix zijn. Laat M_{ij} de $(n-1) \times (n-1)$ submatrix van A zijn verkregen door uit A de i-de rij en de j-de kolom weg te laten. De determinant $\det(M_{ij})$ heet de *minor* van matrixelement a_{ij}.

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]$ een $n \times n$ matrix zijn. De *cofactor* A_{ij} van matrixelement a_{ij} is gedefinieerd als

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De minor van a_{12} is

$$\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34$$

De cofactor van a_{12} is

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = (-1)(-34) = 34$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De minor van a_{12} is

$$\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34$$

De cofactor van a_{12} is

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = (-1)(-34) = 34$$

Het schaakbordpatroon van $(-1)^{i+j}$ in een matrix:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Stelling (Cofactor-expansie)

Laat $A = [a_{ij}]$ *een* $n \times n$ *matrix zijn. Dan*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

*(*ontwikkeling *van* $\det(A)$ naar de i-de rij *) en ook*

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

*(*ontwikkeling *van* $\det(A)$ naar de j-de kolom. *)*

Bewijs voor 3×3, ontwikkeling naar eerste rij:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

want

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Voorbeeld

Ontwikkel de determinant van

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

naar de eerste rij (meeste nullen):

$$\det(A) = (3)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+(0)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1.$$

Voorbeeld

Ontwikkeling naar de derde rij (meeste nullen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\left((-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+3\left((2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3(2(-2) + 3(8)) + 3(2(8) - 2(10)) = 3(20) + 3(-4) = 48$$

We kunnen mbv rij- en kolomoperaties veel nullen introduceren in een rij of kolom en dan naar die rij/kolom ontwikkelen:

Voorbeeld

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (\text{kolomoperatie}) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = (\text{rijoperatie})\ (1) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -16 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = (2)(36 - 32) = 8$$

Volume en oppervlakte

Met behulp van determinanten kan de oppervlakte van een driehoek of parallellogram worden uitgerekend:

Volume en oppervlakte

Met behulp van determinanten kan de oppervlakte van een driehoek of parallellogram worden uitgerekend:

Stelling

Als P het parallellogram in $\mathbb{R}^2$ is dat opgespannen wordt door de vectoren

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$\textit{opp } P = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Een analoge uitspraak geldt voor het volume van een een parallellepipedum in de $\mathbb{R}^3$, en algemener in $\mathbb{R}^n$.

Hieruit volgt voor de oppervlakte van een driehoek:

Stelling

Als T een driehoek met hoekpunten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) in $\mathbb{R}^2$ is dan geldt

$$\textit{opp } T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\right)\right|$$

ofwel

$$\textit{opp } T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Hieruit volgt voor de oppervlakte van een driehoek:

Stelling

Als T een driehoek met hoekpunten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) in $\mathbb{R}^2$ is dan geldt

$$opp\ T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\right)\right|$$

ofwel

$$opp\ T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|$$

Voorbeeld

De driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(0,p)$ en (p,p) heeft oppervlakte $\frac{1}{2}p^2$.