Lineaire Algebra voor ST

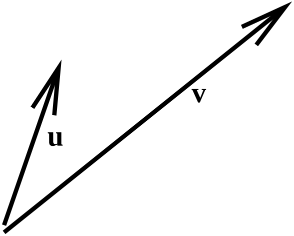
docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 4

Inhoud

Sommige fysische grootheden hebben alleen een grootte (bijv. massa, volume, druk). Dit zijn *scalaire* grootheden. Andere grootheden een grootte en een richting (bijv. snelheid, kracht, versnelling). Deze worden beschreven met *vectoren*

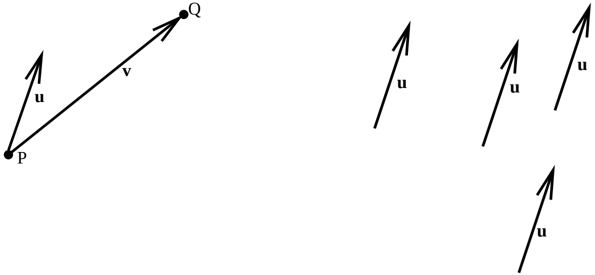


Definitie

Een *vector* in het platte vlak of in de ruimte kan voorgesteld worden door een pijl. De pijlpunt geeft de richting aan, de lengte van het lijnstuk de grootte. Als $\mathbf{v}$ een vector is met beginpunt (*staart*) P en eindpunt (*kop*) Q dan schrijven we

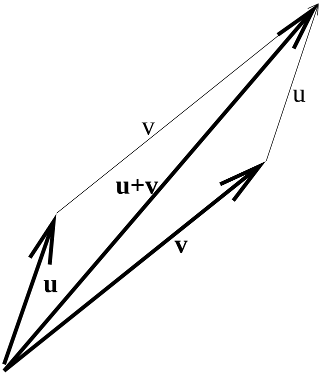
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

Vectoren met dezelfde richting en grootte zijn equivalent en noemen we daarom *gelijk.*



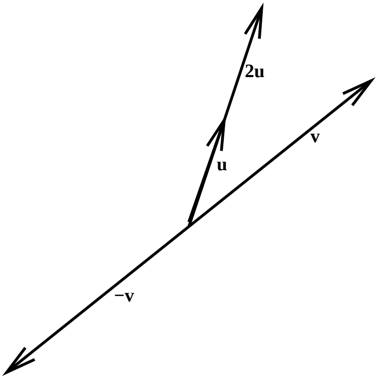
Definitie

Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ vectoren zijn in het vlak of de ruimte, dan is de *som* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ de 'samenstelling' van de pijlen $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$: verschuif $\mathbf{v}$ zodat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\mathbf{u}$, nu is het beginpunt van $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ per definitie gelijk aan het beginpunt van $\mathbf{u}$ en het eindpunt van $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is per definitie gelijk aan het eindpunt van $\mathbf{v}$.



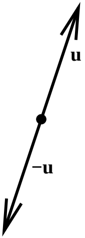
Definitie

Als $\mathbf{u}$ een vector is in het vlak of de ruimte, dan is voor $c \in \mathbb{R}$ het *scalaire product* $c\mathbf{u}$ per definitie de vector die een lengte heeft die $|c|$ maal de lengte is van $\mathbf{u}$, en die als $c > 0$ dezelfde richting heeft als $\mathbf{u}$, terwijl als $c < 0$ de richting tegenovergesteld is aan die van $\mathbf{u}$. We noemen $(-1)\mathbf{u}$ de *tegengestelde* van $\mathbf{u}$ en noteren deze met $-\mathbf{u}$.



De vector met lengte 0 heet de *nulvector* en wordt ook genoteerd met $\mathbf{0}$. Voor elke vector $\mathbf{u}$ in het vlak of de ruimte geldt dat

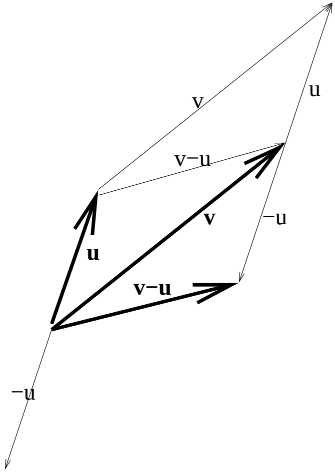
$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \text{ en } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$



Bovendien geldt

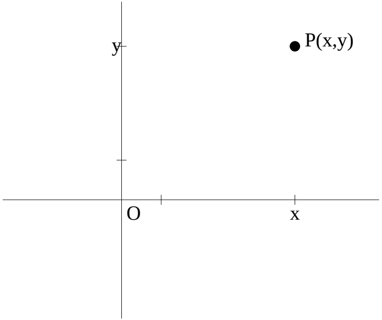
$$-\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ook schrijven we voor $\mathbf{v} + (-\mathbf{u})$ meestal $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ en noemen dit het *verschil* van $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}$.



$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

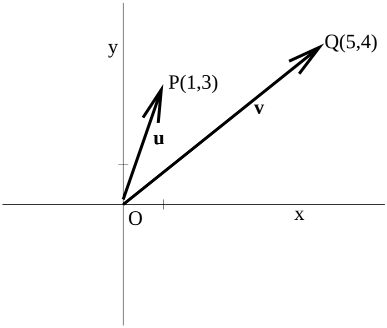
kan opgevat worden als de verzameling punten P in het platte vlak: x en y zijn de coördinaten van P in een *rechthoekig coördinatensysteem.*



De vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ met staart in de oorsprong $O = (0, 0)$ en kop in het punt $P(x, y)$ heeft per definitie *componenten* x en y (de coördinaten van de kop als de staart in O wordt genomen). We associëren met deze vector de 2×1 matrix

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

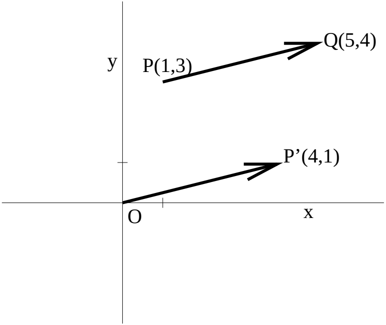
en noemen zo'n matrix dan ook een een *vector in het vlak* of een 2-vector. NB: $\mathbb{R}^2$ staat ook voor de verzameling van alle 2-vectoren.



Ander aangrijpingspunt

De vector $\overrightarrow{PQ}$ met staart $P(x,y)$ (niet noodzakelijk de oorsprong) en kop $Q(x',y')$ in $\mathbb{R}^2$ heeft dezelfde lengte en richting als de vector $\overrightarrow{OP'}$ met staart O en kop $P'(x'-x, y'-y)$. Kortom,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \end{bmatrix}.$$



Voorbeeld

$\overrightarrow{PQ}$, met $P(-3,1)$ en $Q(-1,4)$ is gelijk aan de vector

$$\begin{bmatrix} (-1)-(-3) \\ 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Definitie

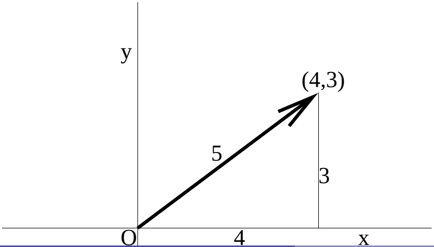
De *lengte* of *norm* $\|\mathbf{u}\|$ van vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

in het vlak, is wegens Pythagoras gelijk aan

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

MATLAB: norm(u)



Voorbeeld

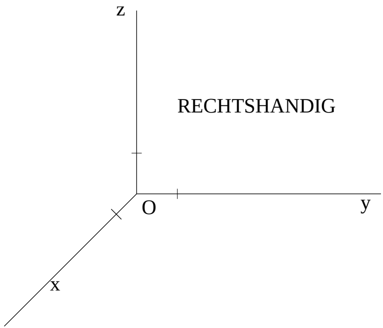
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

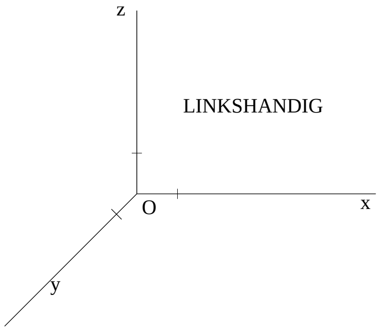
$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

De *richting* van een vector in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door zijn hoek θ met de positieve x-as, ofwel met zijn helling (richtingscoëfficiënt) $\tan\theta$.

Vectoren in de ruimte

In de ruimte kan een rechthoekig coördinatenstelsel *linkshandig* of *rechtshandig* zijn. De verzameling van alle punten (x, y, z) in de ruimte heet $\mathbb{R}^3$.





De vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ met staart in de oorsprong $O = (0, 0, 0)$ en kop in het punt $P(x, y, z)$ heeft per definitie *componenten* x, y en z (de coördinaten van de kop als de staart in O wordt genomen). We associëren met deze vector de 3×1 matrix

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

en noemen zo'n matrix dan ook een een *vector in de ruimte* of een 3-vector.

NB: $\mathbb{R}^3$ staat ook voor de verzameling van alle 3-vectoren.

NB: analoog noemen we de verzameling van alle n-vectoren $\mathbb{R}^n$.

Ander aangrijpingspunt

De vector $\overrightarrow{PQ}$ met staart $P(x, y, z)$ (niet noodzakelijk de oorsprong) en kop $Q(x', y', z')$ in $\mathbb{R}^3$ heeft dezelfde lengte en richting als de vector $\overrightarrow{OP'}$ met staart O en kop $P'(x' - x, y' - y, z' - z)$. Kortom,

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld

$\overrightarrow{PQ}$, met $P(-3, 1, 1)$ en $Q(-1, 4, 1)$ is gelijk aan de vector

$$\begin{bmatrix} (-1) - (-3) \\ 4 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vectoroptelling

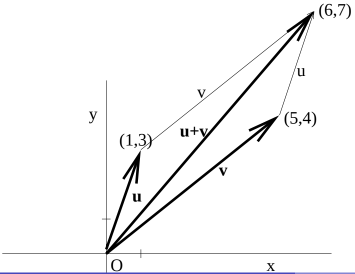
Matrixoptelling komt voor vectoren precies overeen met de meetkundige vectoroptelling in het vlak en in de ruimte. Als

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dan representeert de matrix

$$\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

correct de meetkundige samenstelling $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. (Idem in $\mathbb{R}^3$).

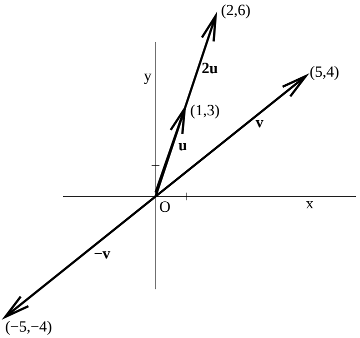


Scalair veelvoud van een vector

Ook scalaire vermenigvuldiging van matrices komt voor vectoren in het vlak en in de ruimte overeen met de meetkundige definitie. Als

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ en } c \in \mathbb{R}, \text{ dan } c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$$

heeft een lengte die $|c|$ maal groter is dan de lengte van $\mathbf{u}$ en een richting die hetzelfde is (als $c > 0$) of tegengesteld (als $c < 0$). (Idem in $\mathbb{R}^3$)

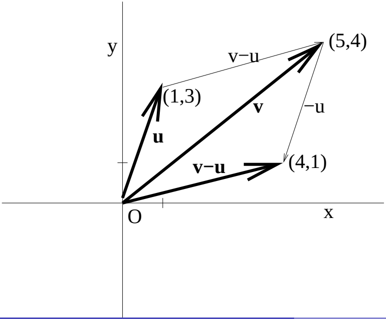


De nulvector in $\mathbb{R}^2$ wordt gerepresenteerd door een 2×1 nulmatrix, en de nulvector in $\mathbb{R}^3$ door een 3×1 nulmatrix:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ respectievelijk } \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Het verschil $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ van twee vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}$ komt overeen met het verschil van de bijbehorende matrices. In $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{bmatrix}$$



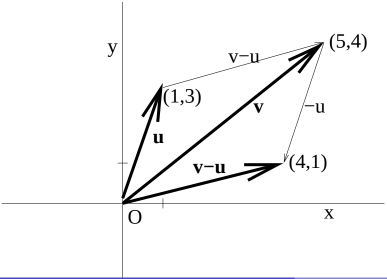
Definitie

De *afstand* tussen twee vectoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

in het vlak is per definitie gelijk aan de afstand tussen hun koppen $P(u_1, u_2)$ en $Q(v_1, v_2)$, dus aan

$$\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$



Voorbeeld

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Definitie

De *lengte* of *norm* $\|\mathbf{u}\|$ van vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

in de ruimte is wegens (twee maal) Pythagoras gelijk aan

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u_1^2} + \mathbf{u_2^2} + \mathbf{u_3^2}} = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

Voorbeeld

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$$

Definitie

De *afstand* tussen twee vectoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

in de ruimte is per definitie gelijk aan de afstand tussen hun koppen $P(u_1, u_2, u_3)$ en $Q(v_1, v_2, v_3)$, dus aan

$$\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2} = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

Voorbeeld

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

De *richting* van een vector in $\mathbb{R}^3$ wordt gegeven door zijn hoeken met de positieve x-as, de positieve y-as en de positieve z-as.
We definiëren dus de *hoek* tussen twee vectoren in $\mathbb{R}^3$.

De *hoek* θ (met $0 \leq \theta \leq \pi$) tussen twee vectoren $\neq \mathbf{0}$

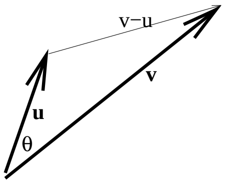
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

in de ruimte is gelijk aan

$$\theta = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Bewijs: de cosinus-regel geeft

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|\| \cos\theta$$



$$\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} = \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\|\cos\theta$$

dus

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}} - \|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}}{2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}
\end{aligned}$$

Voorbeeld

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De hoek θ tussen **u** en **v** wordt gegeven door

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Omdat $0 \leq \theta \leq \pi$ geldt

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ of } \theta = 60^\circ.$$

Een analoge formule is waar voor de hoek θ tussen twee vectoren $\neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Er is dus een verband tussen het inproduct en de hoek θ tussen twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$, beide ongelijk aan $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

In het bijzonder geldt dat:

- θ is scherp ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) als $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > \mathbf{0}$,
- θ is stomp ($\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$) als $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < \mathbf{0}$, en
- θ is recht ($\theta = \frac{\pi}{2}$) als $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Definitie

Twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ in het vlak of de ruimte heten *orthogonaal* als ze loodrecht op elkaar staan (notatie $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$).

Stelling

Twee vectoren in het vlak of de ruimte zijn orthogonaal dan en slechts dan als hun inproduct nul is.

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

staan loodrecht op elkaar, want
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 3 - 12 + 9 = 0$

Voor vectoren in $\mathbb{R}^n$ (n willekeurig) is een inproduct gedefinieerd. Daarom kunnen de begrippen lengte, afstand, hoek, en orthogonaliteit gedefinieerd worden in de $\mathbb{R}^n$ naar analogie met de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Stelling

Als $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *en* $\mathbf{w}$ *vectoren in* $\mathbb{R}^2$ *of* $\mathbb{R}^3$ *zijn, en* $c, d \in \mathbb{R}$, *dan*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(vectoroptelling is commutatief)*

(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ *(vectoroptelling is associatief)*

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

(f) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

(g) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Bewijs: dit zijn eerder bewezen eigenschappen van matrixoperaties.

NB: Ook waar voor vectoren in de $\mathbb{R}^n$.

Matrixtransformaties

Een 2×2 matrix A correspondeert met een functie (afbeelding) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ afbeeldt op de vector $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Voorbeeld

Spiegeling in de x-as van een vector in $\mathbb{R}^2$ is de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Het *beeld* onder f van de 2-vector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ is de 2-vector } f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Verlenging van een vector in $\mathbb{R}^2$ is de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix}$$

voor een zekere $r > 1$.
Als $0 < r < 1$, dan heet deze afbeelding **contractie.**

Voorbeeld

Rotatie (tegen de klok in) over een hoek ϕ van een vector in $\mathbb{R}^2$ is de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\phi) - y\sin(\phi) \\ x\sin(\phi) + y\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) - r\sin(\theta)\sin(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) + r\sin(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

waarbij $x = r\cos(\theta)$ en $y = r\sin(\theta)$ (poolcoördinaten).
Rotatie van een 2-vector over een hoek van zestig graden komt neer op (voor)vermenigvuldigen met de matrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2\sqrt(3) \\ 1/2\sqrt(3) & 1/2 \end{bmatrix}$$

In het algemeen wordt door (voor)vermenigvuldigen met een $m \times n$ matrix A een afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gedefinieerd: als $\mathbf{x}$ een n-vector is dan is $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ een m-vector.

Voorbeeld

Projectie van een vector in $\mathbb{R}^3$ op het xy-vlak is de afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die gedefinieerd is door

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Het *bereik* van f is de hele $\mathbb{R}^2$ want voor elke 2-vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ bestaat er een 3-vector $\mathbf{u}$, bijv. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ waarvoor

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{v}.$$

Volume en oppervlakte

Met behulp van determinanten kan de oppervlakte van een driehoek of parallellogram worden uitgerekend:

Stelling

Als P het parallellogram in $\mathbb{R}^2$ is dat opgespannen wordt door de vectoren

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dan geldt

$$\text{opp } P = \left| \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \right) \right| = \left| \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \right) \right|$$

Een analoge uitspraak geldt voor het volume van een een parallellepipedum in de $\mathbb{R}^3$, en algemener in $\mathbb{R}^n$.

Hieruit volgt voor de oppervlakte van een driehoek:

Stelling

Als T een driehoek met hoekpunten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) in $\mathbb{R}^2$ is dan geldt

$$opp\ T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\right)\right|$$

ofwel

$$opp\ T = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right|$$

De determinant van een matrix A geeft aan met welke factor de oppervlakte (in $\mathbb{R}^2$) of het volume (in $\mathbb{R}^3$ of algemener $\mathbb{R}^n$) van een gesloten figuur toeneemt door op deze de matrixtransformatie toe te passen gedefinieerd door (voor)vermenigvuldigen met A.

Voorbeeld

Laat T een driehoek zijn in $\mathbb{R}^2$, gedefinieerd door drie hoekpunten of vectoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ in $\mathbb{R}^2$. Laat A een 2×2 matrix zijn, en $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de afbeelding gedefinieerd door

$$L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

Dan geldt voor de oppervlakte van de driehoek $L(T)$ gedefinieerd door de hoekpunten $L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}), L(\mathbf{z})$ dat

$$\text{opp } L(T) = |\det(A)| \cdot \text{opp } T$$

Voorbeeld

Spiegeling in de x-as is de matrixtransformatie met matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Deze matrix heeft determinant -1. Spiegeling laat de oppervlakte van een driehoek invariant.

Voorbeeld

Rotatie (tegen de klok in) over een hoek ϕ heeft matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

met determinant $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$. Rotatie laat de oppervlakte van een driehoek invariant.

Voorbeeld

Verlenging van een vector in $\mathbb{R}^2$ heeft matrix

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

met determinant r^2.
Door toepassing van deze matrixtransformatie vermenigvuldigt de oppervlakte van een driehoek (of parallellogram) met r^2:
driehoek $(1,0),(0,1),(1,1)$ heeft oppervlakte $\frac{1}{2}$, terwijl de (beeld)driehoek $(r,0),(0,r),(r,r)$ oppervlakte $\frac{1}{2}r^2$ heeft.