# Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 5

# Inhoud

# Eigenschappen van vectoren in het vlak en de ruimte

## Stelling

*Als* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *en* $\mathbf{w}$ *vectoren in* $\mathbb{R}^2$ *of* $\mathbb{R}^3$ *of* $\mathbb{R}^n$ *zijn, en* $c, d \in \mathbb{R}$, *dan*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(vectoroptelling is commutatief)*

(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ *(vectoroptelling is associatief)*

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(e) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

(f) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

(g) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Bewijs: dit zijn eerder bewezen eigenschappen van matrixoperaties.

# Reële vectorruimten

## Definitie

Een *reële vectorruimte* is een verzameling $V$ met daarop twee operaties $\oplus$ (vectoroptelling) en $\odot$ (scalaire vermenigvuldiging) gedefiniëerd die de volgende eigenschappen hebben:

(a) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in V$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ($V$ is *gesloten* onder de operatie $\oplus$)

- (1) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (commutativiteit).
- (2) $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ (associativiteit).
- (3) Er bestaat een (uniek) element $\mathbf{0}$ (*nulvector*) in $V$ zodat $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- (4) Voor elke $\mathbf{u}$ in $V$ bestaat er een (uniek) element $-\mathbf{u}$ in $V$ (*tegengestelde*) zodat $\mathbf{u} \oplus -\mathbf{u} = -\mathbf{u} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(b) $c \odot \mathbf{u} \in V$ voor alle $\mathbf{u} \in V$ en alle $c \in \mathbb{R}$ ($V$ is *gesloten* onder de operatie $\odot$).

- (5) $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (c \odot \mathbf{v})$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ en alle $c \in \mathbb{R}$.
- (6) $(c + d) \odot \mathbf{u} = (c \odot \mathbf{u}) \oplus (d \odot \mathbf{u})$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ en alle $c \in \mathbb{R}$.
- (7) $c \odot (d \odot \mathbf{u}) = (cd) \odot \mathbf{u}$ voor alle $\mathbf{u} \in V$ en alle $c, d \in \mathbb{R}$.
- (8) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ voor alle $\mathbf{u} \in V$.

## Voorbeeld

$\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^n$ zijn reëele vectorruimten als voor $\oplus$ optelling van vectoren en voor $\odot$ scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal genomen wordt.

## Voorbeeld

Neem $V = M_{mn}$, de verzameling van alle $m \times n$ matrices, $\oplus$ optelling van matrices, en $\odot$ scalaire vermenigvuldiging van een matrix met een reëel getal.
I.h.b. is $\mathbb{R}_n$, de verzameling van alle $1 \times n$ matrices met reëele elementen, met deze operaties een vectorruimte.

## Voorbeeld

Neem $V = \mathbb{R}$, $\oplus$ gewone optelling en $\odot$ gewone vermenigvuldiging van reëele getallen.

## Voorbeeld

Neem $V = P_n$, de verzameling polynomen in $t$ van graad $\leq n$, $\oplus$ optelling van polynomen en $\odot$ scalaire vermenigvuldiging van polynomen: als $p, q \in P_n$ dan

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_o$$

voor zekere $a_i \in \mathbb{R}$, en

$$q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_o$$

voor zekere $b_i \in \mathbb{R}$. Dan is de som $p \oplus q$ het polynoom

$$(p \oplus q)(t) = (a_n + b_n)t^n + \cdots (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

en voor $c \in \mathbb{R}$ is het scalaire product $c \odot p$ het polynoom

$$(c \odot p)(t) = (ca_n)t^n + (ca_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (ca_1)t + (ca_o)$$

## Voorbeeld

Neem $V = C(-\infty, \infty)$, de verzameling continue functies gedefinieerd op $\mathbb{R}$, $\oplus$ optelling van functies en $\odot$ scalaire vermenigvuldiging van functies:

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \qquad\qquad (c \odot f)(t) = cf(t)$$

## Voorbeeld

Neem $V = \mathbb{R}$ met $\oplus$ gedefinieerd door

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

en $\odot$ de gewone vermenigvuldiging van reële getallen. Dan is $V$ met deze operaties *geen* vectorruimte, want

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$$

voor $\mathbf{u} = 3$ en $\mathbf{v} = 1$:

$$3 - 1 = 2 \neq -2 = 1 - 3$$

## Definitie

Laat $V$ een vectorruimte zijn, en $W$ een niet lege deelverzameling van $V$. Dan is $W$ een *lineaire deelruimte* van $V$ als $W$ een vectorruimte is met betrekking tot de operaties $\oplus$ en $\odot$ gedefinieerd op $V$.

## Voorbeeld

$\{\mathbf{0}\}$ is een lineaire deelruimte van elke vectorruimte $V$, net als de hele ruimte $V$. Dit zijn de zgn. triviale deelruimten.

## Voorbeeld

$P_2$ (de polynomen van graad hoogstens 2) is een deelruimte van $P_3$, en algemener is $P_n$ een deelruimte van $P_{n+1}$.

## Voorbeeld

De verzameling $W$ van polynomen van graad *precies* 3 vormt geen deelruimte van $P_3$ omdat de som van de polynomen

$$p(t) = t^3 + 3t - 1 \text{ en } q(t) = -t^3 + 4t^2 + 6$$

graad 2 heeft en dus niet tot $W$ behoort.
Ook behoort de nulvector van $P_3$, het nulpolynoom

$$n(t) = 0$$

niet tot $W$.

## Stelling

*Als $W$ een deelruimte is van de vectorruimte $V$ dan behoort de nulvector van $V$ tot $W$ (en is ook de nulvector van $W$).*

## Stelling

*Als $V$ een vectorruimte met operaties $\oplus$ en $\odot$ is en $W$ een niet lege deelverzameling van $V$. Dan is $W$ een lineaire deelruimte van $V$ dan en slechts dan als:*

(a) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in W$ *voor alle* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ *($W$ is gesloten onder $\oplus$).*

(b) $c \odot \mathbf{u} \in \mathbf{W}$ *voor alle* $\mathbf{u} \in W$ *en* $c \in \mathbb{R}$ *($W$ is gesloten onder $\odot$).*

## Voorbeeld

Laat $\mathbf{v} \in V$, dan vormt de verzameling van alle vectoren die een scalair veelvoud zijn van $\mathbf{v}$ een lineaire deelruimte van $V$.
Een lijn door de oorsprong is dus een deelruimte van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ want deze kan worden geparametriseerd als

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

voor een vector $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$.
NB: lijnen door de oorsprong zijn de enige niet-triviale deelruimtes van $\mathbb{R}^2$.

# Nulruimte

## Definitie

Voor een $m \times n$ matrix $A$ is de verzameling van oplossingen $\mathbf{x}$ van het homogene stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Deze ruimte heet de *oplossingsruimte* van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ of de *nulruimte* van de matrix $A$.
Notatie: $\mathrm{Null}(A)$

Bewijs dat $\mathrm{Null}(A)$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is:

$$\text{Als } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ en } A\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

dan ook

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

en voor $c \in \mathbb{R}$:

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

NB: de oplossingsverzameling van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ is geen deelruimte.

## Voorbeeld

De oplossingsverzameling van het homogene stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ met } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

is een deelruimte van $\mathbb{R}^4$. De gereduceerde trapvorm van de uitgebreide matrix is

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en dus wordt de algemene oplossing gegeven door

$$x_1 = -r - 2s,\ x_2 = r,\ ,x_3 = s,\ x_4 = s,\ r, s \in \mathbb{R}$$

## Voorbeeld

ofwel door

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ r, s \in \mathbb{R}$$

De oplossingsruimte bestaat uit alle vectoren $\mathbf{x}$ van de vorm $\mathbf{x} = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, met $r, s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We schrijven vanaf nu simpelweg $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ voor $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$ en $c\mathbf{v}$ voor $c \odot \mathbf{v}$.

### Voorbeeld

Laat $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_2}$ vectoren zijn in een vectorruimte $V$. Laat $W$ de verzameling van alle vectoren van de vorm

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}$$

met $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ zijn. Dan is $W$ een deelruimte van $V$. Immers kies $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2} \in W$, dan

$$\mathbf{w_1} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} \text{ en } \mathbf{w_2} = b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2}$$

en dus

$$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = (a_1 + b_1)\mathbf{v_1} + (a_2 + b_2)\mathbf{v_2} \in W.$$

Bovendien geldt voor $c \in \mathbb{R}$ dat

$$c\mathbf{w_1} = c(a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}) = (ca_1)\mathbf{v_1} + (ca_2)\mathbf{v_2}$$

NB: dus vlakken door de oorsprong zijn lineaire deelruimtes van $\mathbb{R}^3$, want deze kunnen worden geparametriseerd als

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{w},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

voor zekere 3-vectoren **u** en **w**.

NB: lijnen en vlakken door de oorsprong zijn de enige niet-triviale lineaire deelruimtes van $\mathbb{R}^3$.
NB: een vlak in $\mathbb{R}^3$ dat niet door de oorsprong gaat kan worden geparametriseerd als

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{w},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

voor zekere 3-vectoren $\mathbf{v_0} \neq \mathbf{0}$, **u** en **w** en is *geen* lineaire deelruimte.

# Lineaire combinaties

**Definitie**

Als $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_k}$ vectoren in een vectorruimte $V$ zijn, dan is een vector $\mathbf{v} \in V$ een *lineaire combinatie* van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_k}$ als

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_k\mathbf{v_k}$$

voor zekere reële getallen $a_1, a_2, \dots a_k$.

## Voorbeeld

In $\mathbb{R}^3$ is de vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

een lineaire combinatie van de vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Immers $a_1$, $a_2$ en $a_3$ oplossen uit

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

leidt tot het stelsel

## Voorbeeld

$$\begin{array}{rcrcrcr} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 2 \\ 2a_1 & & & + & a_3 & = & 1 \\ a_1 & + & 2a_2 & & & = & 5 \end{array}$$

wat als oplossing $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$ heeft. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ofwel

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2} - \mathbf{v_3}$$

# Opspansel

## Definitie

Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_k}\}$ een verzameling vectoren in een vectorruimte $V$ zijn. Dan is het *(lineair) opspansel* van $S$ per definitie de verzameling van alle lineaire combinaties van de vectoren in $S$. Notatie:

$$\text{span } S, \text{ of } \text{span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots \mathbf{v_k}\}$$

## Voorbeeld

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

behoort in $\mathbb{R}^3$ tot het opspansel van

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Stelling

*Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_k}\}$ een verzameling vectoren in een vectorruimte $V$ zijn. Dan is span $S$ een deelruimte van $V$.*

Bewijs: als

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_k\mathbf{v_k}, \text{ en}$$

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2} + \cdots + b_k\mathbf{v_k}, \text{ dan is}$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{v_1} + (a_2 + b_2)\mathbf{v_2} + \cdots + (a_k + b_k)\mathbf{v_k} \in \text{span } S$$

en voor $c \in \mathbb{R}$:

$$c\mathbf{v} = ca_1\mathbf{v_1} + ca_2\mathbf{v_2} + \cdots + ca_k\mathbf{v_k} \in \text{span } S$$

## Voorbeeld

Als $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_k}$ vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn, dan is het opspansel gelijk aan een lijn of een vlak door de oorsprong, of aan $\{\mathbf{0}\}$, of aan $\mathbb{R}^3$.

## Voorbeeld

De nulruimte van

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

is een deelruimte van $\mathbb{R}^4$. De gereduceerde trapvorm van de uitgebreide matrix $[A \mid \mathbf{0}]$ is

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en dus wordt de algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gegeven door

$$x_1 = -r - 2s,\ x_2 = r,\ ,x_3 = s,\ x_4 = s,\ r, s \in \mathbb{R}$$

## Voorbeeld

ofwel door

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Er geldt

$$\mathrm{null}(A) = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

# Opspannen

## Definitie

De vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ in een vectorruimte $V$ *spannen $V$ op* als elke $\mathbf{v} \in V$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$.
Notatie: *span* $S = V$ (met $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$).

## Voorbeeld

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

spannen $\mathbb{R}^3$ op, want laat

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

een willekeurige vector in $\mathbb{R}^3$ zijn, dan geeft $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{v}$

## Voorbeeld

een stelsel lineaire vergelijkingen met uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-2a \\ 0 & 1 & -1 & c-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a+c \\ 0 & -2 & -1 & -2a+b \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a+c \\ 0 & 0 & -3 & -4a+b+2c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a+c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a-b-2c}{3} \end{array}\right]$$

Dit stelsel heeft voor elke $a, b, c$ een oplossing, namelijk

$$a_1 = \frac{-2a+2b+c}{3}, \; a_2 = \frac{a-b+c}{3}, \; a_3 = \frac{4a-b-2c}{3}.$$

Dus elke $\mathbf{v} \in V$ is een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$.

# Voorbeeld

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \text{en } \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

spannen $\mathbb{R}^3$ op, want laat

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

een willekeurige vector in $\mathbb{R}^3$ zijn, dan geeft $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} + a_4\mathbf{v_4} = \mathbf{v}$ het stelsel met uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -a+c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4a-b-2c}{3} \end{array}\right]$$

Dit stelsel is consistent (heeft zelfs voor elke $a, b, c$ oneindig veel oplossingen). Dus elke $\mathbf{v} \in V$ is (op meerdere manieren) een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$.