Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 6

Inhoud

Lineaire onafhankelijkheid

Definitie

De vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ in een vectorruimte V heten *lineair afhankelijk* als er constanten $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ bestaan, niet alle gelijk aan nul, zodat

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$$

Zoniet, dan heten $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ *lineair onafhankelijk* .

NB: dus $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ is lineair onafhankelijk als

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$$

alleen de triviale oplossing heeft:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zijn lineair onafhankelijk, want

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

leidt tot het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

wat als enige oplossing heeft:

$$a_1 = 0, \ a_2 = 0, \ a_3 = 0.$$

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

zijn lineair onafhankelijk, want uit

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

volgt:

$$a_1 = 0, \; a_2 = 0.$$

Dus: een deelverzameling van een onafhankelijke verzameling is weer onafhankelijk.

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zijn lineair afhankelijk, want $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$ leidt tot het stelsel

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

wat als algemene oplossing heeft

$$a_1 = -\frac{1}{2}t, \ a_2 = -\frac{1}{2}t, \ a_3 = t, \ t \in \mathbb{R}$$

en dus niet-triviale oplossingen heeft, bijvoorbeeld (t=2):

$$a_1 = -1, \ a_2 = -1, \ a_3 = 2 \text{ (inderdaad } -\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} = \mathbf{0})$$

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zijn lineair afhankelijk, want

$$-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} + 0\mathbf{v_4} = \mathbf{0}.$$

Dus: als je een lineair afhankelijke verzameling uitbreidt krijg je weer een lineair afhankelijke verzameling.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

Er blijft minstens één vrije variabele (kolom zonder spil).

Stelling

De niet-nul vectoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ *in een vectorruimte* V *zijn lineair afhankelijk dan en slechts dan als minstens één van de vectoren, zeg* $\mathbf{v_j}$*, een lineaire combinatie is van de voorafgaande vectoren:*

$$\mathbf{v_j} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v_{j-1}}$$

Voorbeeld

Als $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_2}$ afhankelijk zijn, geldt

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

met (bijv.) $a_2 \neq 0$, dus

$$\mathbf{v_2} = -\frac{a_1}{a_2}\mathbf{v_1}$$

Twee vectoren zijn lineair afhankelijk als de één een veelvoud is van de ander.

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

zijn lineair afhankelijk, want $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} + a_4\mathbf{v_4} = \mathbf{0}$ heeft een niet-triviale oplossing: $a_1 = -1,\ a_2 = -1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 0$, dus

$$-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Hieruit volgt dat $\mathbf{v_3}$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_2}$:

$$\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\mathbf{v_1} + \frac{1}{2}\mathbf{v_2}$$

NB: er volgt ook

$$\mathbf{v_1} = -\mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}, \qquad \mathbf{v_2} = -\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_3}$$

NB: als $\mathbf{v_j}$ is een lineaire combinatie is van de overige vectoren in $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ dan is S lineair afhankelijk en

$$\text{span } S = \text{span } \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_{j-1}}, \mathbf{v_{j+1}}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$$

Voorbeeld

De vectoren (polynomen) in P_2

$$\mathbf{v_1} = 1 - t, \ \mathbf{v_2} = 5 + 3t - 2t^2, \ \text{en } \mathbf{v_3} = 1 + 3t - t^2$$

zijn lineair afhankelijk, want

$$\mathbf{v_2} = 3\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_3}$$

en dus

$$3\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Omdat $\mathbf{v_2}$ in het opspansel zit van $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_3}$ geldt dat

$$\text{span } \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} = \ \text{span } \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_3}\}$$

Basis

Definitie

Als V een vectorruimte is en $S = \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}$ een verzameling vectoren in V vormen, dan heet S een *basis* voor V als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan.

- S spant V op
- S is lineair onafhankelijk.

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vormen een basis van $\mathbb{R}^3$, de zogenaamde *natuurlijke basis* of *standaardbasis* voor $\mathbb{R}^3$.

De standaardbasis voor $\mathbb{R}^n$ is $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ met $\mathbf{e_i}$ de n-vector met een 1 in de i-de rij en verder nullen.
Dus $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$

De standaardbasis voor P_n is $\{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\}$.

Voorbeeld

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

spannen $\mathbb{R}^3$ op, want het stelsel met uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -a+c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4a-b-2c}{3} \end{array}\right]$$

is consistent (heeft zelfs voor elke a, b, c oneindig veel oplossingen). Dus elke $\mathbf{v} \in V$ is (op meerdere manieren) een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}$.

NB: de kolommen van een $m \times n$ matrix spannen de $\mathbb{R}^m$ op $\Leftrightarrow$ elk van de m rijen heeft na vegen een spil.

Voorbeeld

De vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

zijn lineair onafhankelijk, want uit

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} = \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

volgt:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0.$$

NB: de kolommen van een matrix zijn lineair onafhankelijk $\Leftrightarrow$ elke kolom heeft na vegen een spil (er zijn geen vrije variabelen).

Voorbeeld

De vectoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vormen een basis van $\mathbb{R}^3$, want het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

heeft alleen de triviale oplossing en het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a+c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a-b-2c}{3} \end{array}\right]$$

heeft een oplossing voor elke $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld

Anders gezegd: De kolommen van

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vormen een basis van $\mathbb{R}^3$ want deze matrix heeft na vegen een spil in elke rij en in elke kolom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{(Gauss-Jordan reductie)}$$

NB: de kolommen van een matrix vormen een basis van $\mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ de matrix is vierkant en inverteerbaar.

Voorbeeld

De vectoren (polynomen) in P_2

$$\mathbf{v_1} = t^2 + 2t + 1,\ \mathbf{v_2} = t^2 + 2,\ \text{en}\ \mathbf{v_3} = t^2 + t$$

vormen een basis van de vectorruimte P_2, want het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

heeft alleen de triviale oplossing en het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & -a + c \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4a-b-2c}{3} \end{array}\right]$$

heeft een oplossing voor elke $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Definitie

Een vectorruimte V is *eindig-dimensionaal* als er een eindige verzameling vectoren uit V bestaat die een basis vormt van V.
Als er geen eindige basis bestaat heet V *oneindig-dimensionaal.*

Stelling

Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ een basis is van de vectorruimte V, dan kan elke vector in V op eenduidige wijze geschreven worden als lineaire combinatie van vectoren in S.

Basis opspansel bepalen

Door herhaaldelijk een opgespannen vector weg te laten:

Stelling

Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *een verzameling niet-nul vectoren zijn in de vectorruimte* V *en laat* $W = span\ S$. *Dan is er een deelverzameling van* S *die een basis vormt van* W.

NB: Omslachtig! Voor elke vector die je weglaat los je opnieuw een homogeen stelsel op (om te zien of overgebleven vectoren lineair onafhankelijk zijn). Maar het kan handiger.

Voorbeeld

Een basis van W =span $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}, \mathbf{v_5}\}$ en

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_5} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

vinden we als volgt. Bepaal de uitgebreide matrix van

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} + a_4\mathbf{v_4} + a_5\mathbf{v_5} = \mathbf{0}$$

en breng deze in gereduceerde trapvorm:

Voorbeeld

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De leidende enen staan in kolommen 1,2,4 en daarom kunnen we voor a_3, a_5 willekeurige reële getallen invullen, en a_1, a_2 en a_4 oplossen in termen van a_3, a_5:

$$a_1 = -a_3 + 2a_5,\ a_2 = -a_3 + a_5,\ a_4 = -a_5$$

Daarom zijn $\mathbf{v_3}$ en $\mathbf{v_5}$ lineaire combinaties van $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_4}$: nemen we $a_3 = 1, a_5 = 0$ dan geeft dit $a_1 = -1, a_2 = -1, a_4 = 0$ dus

$$-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

ofwel

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

en met $a_3 = 0, a_5 = 1$ krijgen we $\mathbf{v_5} = -2\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_4}$.
Dus $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_4}$ spannen W op.

Voorbeeld

Ook zijn $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_4}$ lineair onafhankelijk want de matrix van het stelsel

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_4\mathbf{v_4} = \mathbf{0}$$

bestaat uit de kolommen 1,2 en 4 (en de laatste) van de matrix

$$\left[\begin{array}{ccccr|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccr|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

maar dan is dit stelsel dus equivalent met het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

en dat stelsel heeft alleen de triviale oplossing: $a_1 = a_2 = a_4 = 0$.

Efficiënte procedure voor het bepalen van een basis voor $W = \text{span } S$ bestaande uit vectoren van $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$:

1. Construeer de uitgebreide matrix behorend bij het homogene stelsel

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

2. Breng deze uitgebreide matrix in (gereduceerde) trapvorm
3. De vectoren die corresponderen met de kolommen waarin de leidende enen staan vormen een basis T van W.

Stelling

Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *een basis is van de vectorruimte* V, *en* $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_r}\}$ *is een verzameling lineair onafhankelijke vectoren in* V, *dan geldt* $r \leq n$.

Stelling

Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ *en* $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m}\}$ *twee bases zijn van een vectorruimte* V, *dan geldt* $n = m$.

Nu kunnen we definiëren:

Definitie

De *dimensie* van een eindig-dimensionale vectorruimte V is het aantal vectoren in een basis van V.
Notatie: *dim* V
We spreken af dat de dimensie van de triviale vectorruimte $\{\mathbf{0}\}$ nul is.

Voorbeeld

Een basis voor P_2 is $\{t^2, t, 1\}$ dus dim $P_2 = 3$.

NB: als dim $V = n$, dan is elke verzameling van $m > n$ vectoren uit V lineair afhankelijk.

NB: als $\dim V = n$, dan is een verzameling van $m < n$ vectoren uit V niet opspannend.

Stelling

Als S een lineair onafhankelijke verzameling vectoren is in een eindig-dimensionale vectorruimte V, dan kan S uitgebreid worden naar een basis T van V.

Voorbeeld

Vind een basis van $\mathbb{R}^4$ die de vectoren

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ en } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bevat (ze zijn lineair onafhankelijk want geen veelvoud van elkaar).
Oplossing: voeg de vier standaard-basisvectoren van $\mathbb{R}^4$ toe, en bepaal een basis van span $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$. Het homogene systeem

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

heeft leidende enen in de kolommen corresponderend met $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_4}$ dus $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_4}\}$ is een basis van $\mathbb{R}^4$.

Stelling

Als V een vectorruimte is van dimensie n dan geldt

(a) *Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ lineair onafhankelijk is, dan is S een basis van V.*

(b) *Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ V opspant, dan is S een basis van V.*

Basis en dimensie nulruimte bepalen

Voorbeeld

Bepaal een basis voor de nulruimte van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Los op $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

in gereduceerde trapvorm gebracht:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Leidende enen in kolommen 1,3,4. Vrije variabelen $x_2 = s$ en $x_5 = t$ met $s, t \in \mathbb{R}$: $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$.

Voorbeeld

Algemene oplossing $x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$ met $s, t \in \mathbb{R}$. Dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s\mathbf{v_1} + t\mathbf{v_2}$$

met

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ is een basis van de nulruimte; de nulruimte heeft dus dimensie 2.

Stelling

De dimensie van de nulruimte van een $m \times n$ matrix A is gelijk aan $n - r$, waarbij r het aantal leidende enen is van de matrix $[B \mid \mathbf{0}]$ in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met $[A \mid \mathbf{0}]$. Gauss-Jordan reductie geeft je een basis voor de nulruimte.

Basis vinden voor de oplossingsruimte van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

- Los $[A \mid \mathbf{0}]$ op met Gauss-Jordan reductie. Als de algemene oplossing geen willekeurige constanten heeft, dan is de oplossingsruimte gelijk aan $\{\mathbf{0}\}$, en heeft dimensie $0 = n - n$.
- Als de algemene oplossing $\mathbf{x}$ wel $p > 0$ willekeurige constanten $s_1, s_2, \ldots, s_p$ heeft, schrijf de oplossing dan als

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{v_1} + s_2\mathbf{v_2} + \cdots + s_p\mathbf{v_p}$$

  Voor elke kolom in de matrix $[B \mid \mathbf{0}]$ zonder leidende 1 wordt een willekeurige constante ingevoerd, dus $p = n - r$.
- $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ is een basis voor de oplossingsruimte van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Verband inhomogeen en homogeen stelsel

Als het stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \text{met } \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

een consistent stelsel is, en $\mathbf{x_p}$ is een particuliere oplossing, dan is de algemene oplossing $\mathbf{x}$ van dit inhomogene stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ van de vorm

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$$

waar $\mathbf{x_h}$ de algemene oplossing is van het homogene stelsel

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

.

Voorbeeld

Bepaal de algemene oplossing van het stelsel met $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Een (particuliere) oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is snel gevonden:

$$\mathbf{x_p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We kennen al een basis van de oplossingsruimte van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is dus

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + \mathbf{x_h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$