Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 7

Inhoud

Kolom-ruimte

Definitie

De kolommen van een $m \times n$ matrix A spannen een deelruimte op van $\mathbb{R}^m$, de zogenaamde *kolom-ruimte* van A.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Kolom-ruimte van A in $\mathbb{R}^4$ is

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Stelling

als A rij-equivalent is met de matrix R in (gereduceerde) trapvorm, dan vormen de kolommen van A die corresponderen met kolommen in R met leidende enen een basis voor de kolom-ruimte van A.

Bewijs: eerder behandeld (bepalen basis opspansel door weglaten).

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leidende enen staan in kolommen 1, 3 en 5 van R dus een basis voor de kolom-ruimte van A is $\{\mathbf{k_1}, \mathbf{k_3}, \mathbf{k_5}\}$, met $\mathbf{k_i}$ de i-de kolom van A.

$$\mathbf{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k_5} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Deze basis bestaat uit kolommen van A!

Rij-ruimte

Definitie

De rijen van een $m \times n$ matrix A spannen een deelruimte op van $\mathbb{R}_n$, de zogenaamde *rij-ruimte* van A.

NB: $\mathbb{R}_n$ is de ruimte van alle $1 \times n$ matrices, of rij-vectoren.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Rij-ruimte van A in $\mathbb{R}_6$ is

$$\operatorname{span}\{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}\}.$$

Stelling

Als A en B rij-equivalente matrices zijn, dan zijn de rij-ruimtes van A en B gelijk.

Bewijs: na een rij-operatie bestaan de rijen van de nieuwe matrix uit lineaire combinaties van rijen van de oude matrix, en andersom.
Gevolg:

Stelling

Als A rij-equivalent is met de matrix R in (gereduceerde) trapvorm, dan vormen de rijen van R met leidende enen (dwz de niet-nulrijen) een basis voor de rij-ruimte van A.

NB: vanwege de trapvorm zijn deze rijen lineair onafhankelijk.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus een basis van de rijruimte van A is $\{\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{r_3}\}$, met

$$\begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r_3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deze basis bestaat niet uit rijen van A!

Voorbeeld

NB: Een basis voor de rij-ruimte van A die uit rijen van A bestaat vinden we door A^T te vegen.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 7 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leidende enen staan in kolommen $1, 2, 3$ dus de eerste drie rijen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ van de matrix A (=eerste drie kolommen van A^T) vormen een basis van de rij-ruimte van A (=kolomruimte van A^T).

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Definitie

De dimensie van de rij-ruimte (kolom-ruimte) van een matrix A heet de *rij-rang (kolom-rang)* van A.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

heeft rij-rang gelijk aan de rij-rang van de rij-equivalente matrix in trapvorm

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en is dus gelijk aan 3 ($=$ het aantal rijen met leidende enen).

Voorbeeld

[vervolg]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

heeft kolom-rang gelijk aan het aantal kolommen met leidende enen in

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en is dus ook gelijk aan 3.

Rang van een matrix

Stelling

Voor elke $m \times n$ matrix A geldt dat de rij-rang en de kolom-rang van A gelijk zijn.

Bewijs: het aantal rijen met leidende enen is gelijk aan het totale aantal leidende enen en het aantal kolommen met leidende enen ook!

Definitie

De *rang* van een matrix A is per definitie zijn rij-rang (of kolom-rang).
Notatie: *rang* A
MATLAB: rank(A)

NB: er geldt voor een $m \times n$ matrix A: rang $A \leq m$ en ook rang $A \leq n$.

Dimensiestelling

Stelling

Als A een $m \times n$ matrix is en we duiden met nulheid A *de dimensie aan van de nulruimte van A dan geldt:*

$$\text{rang } A + \text{nulheid } A = n$$

Bewijs: eerder gezien dat nulheid $A = n - r$ met r het aantal leidende enen.

NB: dus de dimensie van de rijruimte (in $\mathbb{R}_n \cong \mathbb{R}^n$) en de dimensie van de nulruimte (in $\mathbb{R}^n$) tellen op tot de dimensie van $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rij-equivalente matrix in gereduceerde trapvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leidende enen in kolommen 1,3,4. Dus de (kolom-) rang van A is 3.

Voorbeeld

[vervolg]

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oplossen van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$: vrije variabelen $x_2 = s$ en $x_5 = t$ met $s, t \in \mathbb{R}$ (gebonden variabelen $x_1 = -s - t$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$).
Dus basis van de nulruimte van A is

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

en de dimensie van de nulruimte is $2 = 5 - 3 = n - \text{rang } A$.

Stelling

Het lineaire stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *heeft een oplossing dan en slechts dan als rang* $A =$*rang* $[A \mid \mathbf{b}]$.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

heeft geen oplossing omdat rang $A = 2$ en rang $[A \mid \mathbf{b}] = 3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Stelling

Als A een $n \times n$ matrix is dan is rang $A = n$ dan en slechts dan als A rij-equivalent is met I_n

Stelling

De volgende uitspraken zijn equivalent voor een $n \times n$ matrix A:

1. *A is niet-singulier (inverteerbaar)*
2. *A is rij-equivalent met I_n.*
3. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*
4. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ een unieke oplossing*
5. $\det(A) \neq 0$
6. *rang $A = n$*
7. *de dimensie van de nulruimte van A is nul*
8. *de rijen van A zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}_n$*
9. *de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}^n$.*