Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 8

Inhoud

Stelling

Het lineaire stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *heeft een oplossing dan en slechts dan als rang* $A =$*rang* $[A \mid \mathbf{b}]$.

Voorbeeld

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

heeft geen oplossing omdat rang $A = 2$ en rang $[A \mid \mathbf{b}] = 3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Stelling

Als A een $n \times n$ matrix is dan is rang $A = n$ dan en slechts dan als A rij-equivalent is met I_n

Stelling

De volgende uitspraken zijn equivalent voor een $n \times n$ matrix A:

1. *A is niet-singulier (inverteerbaar)*
2. *A is rij-equivalent met I_n.*
3. *$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*
4. *$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ een unieke oplossing*
5. $\det(A) \neq 0$
6. *rang $A = n$*
7. *de dimensie van de nulruimte van A is nul*
8. *de rijen van A zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}_n$*
9. *de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk in $\mathbb{R}^n$.*

Coördinaten

Definitie

Als $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ een *geordende basis* is van een vectorruimte V, dan is elke $\mathbf{v}$ in V op eenduidige wijze te schrijven als

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \cdots + a_n\mathbf{v_n}$$

en we noemen

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

de *coördinaatvector* van $\mathbf{v}$ ten opzichte van de geordende basis S. De elementen van $[\mathbf{v}]_S$ heten de *coördinaten* van $\mathbf{v}$ ten opzichte van S.

NB: als $\dim V = n$ dan is de coördinaatvector een vector in $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld

$S = \{t, 1\}$ is een geordende basis voor P_1 en

$$\mathbf{v} = p(t) = 5t - 2$$

heeft coördinaatvector

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ten opzichte van S.

NB: de coördinaatvector is afhankelijk van de volgorde van de vectoren in de geordende basis: als $S' = \{1, t\}$ dan

$$[\mathbf{v}]_{S'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Neem de geordende basis $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$, met

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \text{en } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

We vinden de coördinaatvector $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ van de vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

door te stellen

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{v}$$

Voorbeeld

Dit geeft aanleiding tot het stelsel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

met oplossing

$$a_1 = 3,\ a_2 = -1,\ a_3 = -2$$

dus

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Inderdaad is

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Isomorfie

Als V een vectorruimte van dimensie n is met basis S, dan kan men met elke vector $\mathbf{v}$ in V een vector in $\mathbb{R}^n$ associëren, namelijk zijn coördinaatvector $[\mathbf{v}]_S$. De vector $\mathbf{v}$ in V en de vector $[\mathbf{v}]_S$ in $\mathbb{R}^n$ gedragen zich precies hetzelfde mbt de gedefinieerde optelling en scalaire vermenigvuldiging:

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_S = [\mathbf{u}]_S + [\mathbf{v}]_S$$

$$[c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S$$

V en $\mathbb{R}^n$ zijn *isomorf.*

Voorbeeld

P_2 heeft basis $\{t^2, t, 1\}$ dus dimensie 3, dus is isomorf met $\mathbb{R}^3$ en kan bestudeerd worden door in plaats van een polynoom

$$3t^2 - 4t + 6$$

in P_2 zijn coördinaatvector $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ te beschouwen.

Overgangsmatrices

Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ twee geordende bases zijn van een vectorruimte V. Dan is voor $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + \cdots + c_n\mathbf{w_n}, \text{ ofwel } [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_S &= [c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + \cdots + c_n\mathbf{w_n}]_S \\ &= [c_1\mathbf{w_1}]_S + [c_2\mathbf{w_2}]_S + \cdots + [c_n\mathbf{w_n}]_S \\ &= c_1[\mathbf{w_1}]_S + c_2[\mathbf{w_2}]_S + \cdots + c_n[\mathbf{w_n}]_S \end{aligned}$$

Definitie

De *overgangsmatrix* of *transitiematrix* van de basis T naar de basis S is de matrix $P_{S \leftarrow T}$ met als j-de kolom de vector $[\mathbf{w_j}]_S$.

NB: dan dus $[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$

Voorbeeld

$S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ met

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$P_{S \leftarrow T} = [[\mathbf{w_1}]_S [\mathbf{w_2}]_S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[vervolg] Laat nu

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dan is

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$

dus

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inderdaad geldt

$$-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ met

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$Q_{T \leftarrow S} = [[\mathbf{e_1}]_T [\mathbf{e_2}]_T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ P_{S \leftarrow T} = [[\mathbf{w_1}]_S [\mathbf{w_2}]_S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

zodat

$$P_{S \leftarrow T} Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

dus P en Q zijn elkaars inverse.

Stelling

Laat V een vectorruimte zijn, met bases $S = \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \ldots, \mathbf{s_n}\}$ en T. De overgangsmatrix $P_{S\leftarrow T}$ van T naar S is inverteerbaar, en de inverse is gelijk aan de overgangsmatrix $Q_{T\leftarrow S}$ van S naar T:

$$P^{-1}_{S\leftarrow T} = Q_{T\leftarrow S}$$

Bewijs: er geldt voor $\mathbf{v} \in V$ dat

$$[\mathbf{v}]_S = P[\mathbf{v}]_T \text{ en } [\mathbf{v}]_T = Q[\mathbf{v}]_S$$

dus

$$[\mathbf{v}]_S = PQ[\mathbf{v}]_S$$

Door $\mathbf{v}$ resp. gelijk te nemen aan $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \ldots, \mathbf{s_n}$ volgt $PQ = I_n$.

Voorbeeld

Bepaal $P_{S \leftarrow T}$ voor $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ met

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de j-de kolom van P is $[\mathbf{w_j}]_S$, dus los op:

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_1} \\ b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2} + b_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_2} \\ c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_3} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Dit geeft drie stelsels met dezelfde coëfficiëntenmatrix. Los tegelijk op:

$$[S|T] = \left[\begin{array}{ccc|c|r|c} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|r|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Conclusie:

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

De matrix $Q_{T\leftarrow S}$ kan op twee manieren bepaald worden:

- $Q = P^{-1}$ dus veeg

$$[P \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

- j-de kolom van $Q_{T\leftarrow S}$ is $[\mathbf{v_j}]_T$ dus veeg

$$[T|S] = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

We vinden op beide manieren:

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Bepaal nu de coördinaatvectoren van de vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ten opzichte van de bases S en T.

$$[S|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \text{ dus } [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dan is

$$[\mathbf{v}]_T = Q_{T \leftarrow S}[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Of andersom (eerst $[\mathbf{v}]_T$ bepalen):

$$[T|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \text{ dus } [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En dan

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Controle van $[\mathbf{v}]_T$:

$$-12 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Op dezelfde manier controleer je $[\mathbf{v}]_S$.