Lineaire Algebra voor ST

docent: Judith Keijsper
TUE, HG 9.31
email: J.C.M.Keijsper@tue.nl
studiewijzer: http://www.win.tue.nl/wsk/onderwijs/2DS06

Technische Universiteit Eindhoven

college 9

Inhoud

Overgangsmatrices

Laat $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_n}\}$ twee geordende bases zijn van een vectorruimte V. Dan is voor $\mathbf{v} \in V$:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + \cdots + c_n\mathbf{w_n}, \text{ ofwel } [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_S &= [c_1\mathbf{w_1} + c_2\mathbf{w_2} + \cdots + c_n\mathbf{w_n}]_S \\ &= [c_1\mathbf{w_1}]_S + [c_2\mathbf{w_2}]_S + \cdots + [c_n\mathbf{w_n}]_S \\ &= c_1[\mathbf{w_1}]_S + c_2[\mathbf{w_2}]_S + \cdots + c_n[\mathbf{w_n}]_S \end{aligned}$$

Definitie

De *overgangsmatrix* of *transitiematrix* van de basis T naar de basis S is de matrix $P_{S \leftarrow T}$ met als j-de kolom de vector $[\mathbf{w_j}]_S$.

NB: dan dus $\qquad [\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$

Voorbeeld

$S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ met

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$P_{S \leftarrow T} = [[\mathbf{w_1}]_S [\mathbf{w_2}]_S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

[vervolg] Laat nu

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dan is

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$

dus

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Inderdaad geldt

$$-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$S = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ met

$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dan $Q_{T \leftarrow S}$ de overgangsmatrix voor de overgang van S naar T:

$$Q_{T \leftarrow S} = [[\mathbf{e_1}]_T [\mathbf{e_2}]_T] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ P_{S \leftarrow T} = [[\mathbf{w_1}]_S [\mathbf{w_2}]_S] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

zodat

$$P_{S \leftarrow T} Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

dus P en Q zijn elkaars inverse.

Stelling

Laat V een vectorruimte zijn, met bases $S = \{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \ldots, \mathbf{s_n}\}$ en T. De overgangsmatrix $P_{S \leftarrow T}$ van T naar S is inverteerbaar, en de inverse is gelijk aan de overgangsmatrix $Q_{T \leftarrow S}$ van S naar T:

$$P_{S \leftarrow T}^{-1} = Q_{T \leftarrow S}$$

Bewijs: er geldt voor $\mathbf{v} \in V$ dat

$$[\mathbf{v}]_S = P[\mathbf{v}]_T \text{ en } [\mathbf{v}]_T = Q[\mathbf{v}]_S$$

dus

$$[\mathbf{v}]_S = PQ[\mathbf{v}]_S$$

Door $\mathbf{v}$ resp. gelijk te nemen aan $\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \ldots, \mathbf{s_n}$ volgt $PQ = I_n$.

Voorbeeld

Bepaal $P_{S \leftarrow T}$ voor $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ en $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ met

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de j-de kolom van P is $[\mathbf{w_j}]_S$, dus los op:

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_1} \\ b_1\mathbf{v_1} + b_2\mathbf{v_2} + b_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_2} \\ c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} &= \mathbf{w_3} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Dit geeft drie stelsels met dezelfde coëfficiëntenmatrix. Los tegelijk op:

$$[S|T] = \left[\begin{array}{ccc|c|r|c} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c|r|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Conclusie:

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

De matrix $Q_{T\leftarrow S}$ kan op twee manieren bepaald worden:

- $Q = P^{-1}$ dus veeg

$$[P \mid I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

- j-de kolom van $Q_{T\leftarrow S}$ is $[\mathbf{v_j}]_T$ dus veeg

$$[T|S] = \left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

We vinden op beide manieren:

$$Q_{T\leftarrow S} = \left[\begin{array}{rrr} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Voorbeeld

Bepaal nu de coördinaatvectoren van de vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ten opzichte van de bases S en T.

$$[S|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \text{ dus } [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dan is

$$[\mathbf{v}]_T = Q_{T\leftarrow S}[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Of andersom (eerst $[\mathbf{v}]_T$ bepalen):

$$[T|\mathbf{v}] = \left[\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \text{ dus } [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En dan

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Controle van $[\mathbf{v}]_T$:

$$-12 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Op dezelfde manier controleer je $[\mathbf{v}]_S$.

Inproductruimten

Stelling

Het standaard inproduct voor vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *in* $\mathbb{R}^2$ *is gedefinieerd als*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

en voldoet aan de volgende eigenschappen

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *voor alle* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ *en* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *dan en slechts dan als* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ *voor alle* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *voor alle* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$

(d) $c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, *voor alle* $c \in \mathbb{R}$ *en* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Het standaard inproduct in $\mathbb{R}^3$ *en algemener in* $\mathbb{R}^n$ *voldoet aan dezelfde eigenschappen.*

Definitie

Laat V een reële vectorruimte zijn. Een *inproduct* op V is een functie die aan elk geordend paar vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ een reëel getal $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ toekent, en die voldoet aan de volgende eigenschappen

(a) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ voor alle $\mathbf{u} \in V$ en $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ dan en slechts dan als $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

(b) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(c) $((\mathbf{u} + \mathbf{v}), \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ voor alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(d) $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, voor alle $c \in \mathbb{R}$ en $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Voorbeeld

Voor elke eindig-dimensionale vectorruimte V van dimensie n kunnen we een inproduct definiëren in termen van het standaard inproduct in $\mathbb{R}^n$: laat $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ een geordende basis zijn voor V. Twee vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ kunnen we schrijven op deze basis. Als

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ en } [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

de coördinaatvectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn, dan kunnen we definiëren:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_S \cdot [\mathbf{w}]_S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Voorbeeld

Laat V de (oneindig-dimensionale) vectorruimte zijn van alle continue reëelwaardige functies op het interval $[0,1]$. Definieer op deze vectorruimte het inproduct voor functies $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

Definitie

Een vectorruimte met daarop gedefinieerd een inproduct heet een *inproductruimte.* Een eindig-dimensionale inproductruimte heet een *Euclidische ruimte.*

Definitie

De *lengte* van een vector $\mathbf{u}$ in een inproductruimte wordt gedefinieerd als

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

Definitie

De *afstand* tussen twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in een inproductruimte wordt gedefinieerd als

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$$

Definitie

We definiëren de *hoek* tussen twee niet-nul vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in een inproductruimte V als die hoek θ waarvoor

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} \text{ en } 0 \leq \theta \leq \pi$$

NB: deze definitie is correct wegens de stelling van Cauchy-Schwarz die zegt dat

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||$$

voor elk tweetal vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in een inproductruimte V. Anders gezegd, als $\mathbf{u},\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||} \leq 1$$

Gevolg: er is precies één hoek θ met $0 \leq \theta \leq \pi$ zodat $\cos\theta = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||}$.
NB: $\theta = \frac{\pi}{2}$ dan en slechts dan als $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$.

Definitie

Twee vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in een inproductruimte V heten *orthogonaal* als $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Voorbeeld

De twee functies $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(t) = t$ en $g(t) = t - \frac{2}{3}$ zijn orthogonale vectoren in de eerder gedefinieerde inproductruimte van continue functies op $[0, 1]$, want

$$(f, g) = \int_0^1 t(t - \frac{2}{3})dt = \int_0^1 (t^2 - \frac{2}{3}t)dt = [\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2]_0^1 = 0$$

Definitie

Een verzameling S van vectoren in een inproductruimte heet *orthogonaal* als elk tweetal vectoren uit S orthogonaal is.

Orthonormale bases

Definitie

Een verzameling S van vectoren in een inproductruimte heet *orthonormaal* als S orthogonaal is en bovendien elke vector in S lengte 1 heeft.

Definitie

Een vector van lengte 1 in een inproductruimte heet een *eenheidsvector*

Voor elke vector $\mathbf{x}$ in een inproductruimte kunnen we een eenheidsvector $\mathbf{u}$ vinden met dezelfde richting als $\mathbf{x}$ door $\mathbf{x}$ op 1 te *normeren:*

$$\mathbf{u} = \frac{1}{||\mathbf{x}||}\mathbf{x}$$

Zo vorm je een orthogonale verzameling gemakkelijk om tot een orthonormale verzameling

Voorbeeld

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De verzameling $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ is orthogonaal. Er geldt dat $||\mathbf{x_1}|| = ||\mathbf{x_2}|| = \sqrt{5}$ en $||\mathbf{x_3}|| = 1$. De vectoren

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

zijn eenheidsvectoren in de richting van $\mathbf{x_1}$ respectievelijk $\mathbf{x_2}$. De verzameling $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{x_3}\}$ is dus orthonormaal.

NB: de orthogonale verzameling $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ is lineair onafhankelijk.

Stelling

Als $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *een eindige verzameling orthogonale niet-nul vectoren is in een inproductruimte* V*, dan is* S *lineair onafhankelijk.*

Bewijs: stel

$$a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \cdots + a_n\mathbf{u_n} = \mathbf{0}$$

en neem aan beide kanten het inproduct met $\mathbf{u_i}$: dit geeft

$$a_i(\mathbf{u_i}, \mathbf{u_i}) = \mathbf{0}$$

dus $a_i = 0$ (want $\mathbf{u_i} \neq \mathbf{0}$).
Gevolg: als je een orthogonale of orthonormale verzameling van n vectoren kunt vinden in een inproductruimte V van dimensie n, dan vormt deze verzameling een basis van V.

Definitie

Een geordende basis S voor een Euclidische ruimte V die bestaat uit een orthonormale verzameling vectoren heet een *orthonormale basis.*

Voorbeeld

De standaardbasis in $\mathbb{R}^n$ is een orthonormale basis.

Het gebruik van een orthonormale basis vermindert het rekenwerk:

Stelling

Laat $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ *een orthonormale basis voor een Euclidische ruimte* V *zijn. En laat* $\mathbf{v}$ *een willekeurige vector in* V *zijn. Dan*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + \cdots + c_n\mathbf{u_n},$$

met

$$c_i = (\mathbf{v}, \mathbf{u_i}), \ i = 1 \ldots n.$$

Om de coördinaatvector

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

te bepalen hoeft dus geen stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden opgelost te worden, maar moeten slechts n inproducten uitgerekend worden.

Voorbeeld

De verzameling $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ met

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix},\ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

is een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^3$. Laat

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dan heeft $\mathbf{v}$ t.o.v. de basis S de volgende coördinaten:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u_1}) = 1,\ (\mathbf{v}, \mathbf{u_2}) = -\frac{1}{5},\ (\mathbf{v}, \mathbf{u_3}) = \frac{7}{5}.$$

Er geldt dus

$$\mathbf{v} = \mathbf{u_1} - \frac{1}{5}\mathbf{u_2} + \frac{7}{5}\mathbf{u_3}$$

Ook inproducten zijn erg makkelijk te bepalen voor vectoren geschreven op een orthonormale basis:

Stelling

Laat V een Euclidische ruimte zijn en $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}\}$ een orthonormale basis voor V. Dan geldt voor vectoren $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + \cdots + a_n\mathbf{u_n}$ en $\mathbf{w} = b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2} + \cdots + b_n\mathbf{u_n}$ dat

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

ofwel het inproduct is gelijk aan het standaard inproduct van de coördinaatvectoren in $\mathbb{R}^n$:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ([\mathbf{v}]_S, [\mathbf{w}]_S).$$

Bewijs:

$$(\mathbf{u_i}, \mathbf{u_j}) = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

Tenslotte zijn ook lengtes van vectoren t.o.v. alle orthonormale bases gelijk. En dus ook afstanden tussen vectoren.

Stelling

Laat S een orthonormale basis zijn voor een inproductruimte V, zodat voor de vector $\mathbf{v}$ in V geldt dat

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Dan geldt voor de lengte van $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Bewijs: $||\mathbf{v}|| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \sqrt{([\mathbf{v}]_S, [\mathbf{v}]_S)} = ||[\mathbf{v}]_S||$

Voorbeeld

Neem $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ een vector in $\mathbb{R}_3$, met lengte

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Neem nu S gelijk aan de orthonormale basis

$\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\}, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\}$ Dan is $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$ en

$$\sqrt{1^2 + (-\frac{1}{5})^2 + (\frac{7}{5})^2} = \sqrt{\frac{75}{25}} = \sqrt{3} = ||\mathbf{v}||$$

Echter, voor de basis $T = \{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$ is $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en geeft $\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ **niet** de lengte van $\mathbf{v}$. De basis T is **niet** orthonormaal.

Projectie

Stelling

Als V een inproductruimte is, en W is een lineaire deelruimte van V, dan kan elke vector $\mathbf{u}$ *in V op eenduidige wijze geschreven worden als*

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

met $\mathbf{w}$ *in W en* $\mathbf{v}$ *loodrecht op W.*

Definitie

de vector $\mathbf{w}$ in bovenstaande ontbinding heet de *loodrechte projectie* $proj_W\mathbf{u}$ van $\mathbf{u}$ op W.

Projectie op een deelruimte W is eenvoudig als je een orthogonale of orthonormale basis van W hebt:

Stelling

Als $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m}\}$ *een orthogonale basis is van* W, *dan*

$$proj_W \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{w_1})}{(\mathbf{w_1}, \mathbf{w_1})}\mathbf{w_1} + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{w_2})}{(\mathbf{w_2}, \mathbf{w_2})}\mathbf{w_2} + \cdots + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{w_m})}{(\mathbf{w_m}, \mathbf{w_m})}\mathbf{w_m}$$

Stelling

Als $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m}\}$ *een orthonormale basis is van* W, *dan*

$$proj_W \mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{w_1})\mathbf{w_1} + (\mathbf{u}, \mathbf{w_2})\mathbf{w_2} + \cdots + (\mathbf{u}, \mathbf{w_m})\mathbf{w_m}$$

Stelling

$\text{proj}_W\mathbf{u}$ is de vector in W met minimale afstand tot $\mathbf{u}$.

NB: in de ontbinding $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ is de vector $\mathbf{v}$ die loodrecht staat op elke vector in W gelijk aan

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \text{proj}_W\mathbf{u}$$

De minimale afstand van $\mathbf{u}$ tot W is gelijk aan de lengte van deze vector $\mathbf{v}$:

$$\text{afstand}(\mathbf{u}, W) = ||\mathbf{u} - \text{proj}_W\mathbf{u}||$$

Gram-Schmidt procedure

Stelling

Laat V een inproductruimte zijn, en $W \neq \{\mathbf{0}\}$ een m-dimensionale deelruimte van V. Dan bestaat er een orthonormale basis $T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m}\}$ voor W. Deze basis kan gevonden worden m.b.v. de zogenaamde Gram-Schmidt procedure *uitgaande van een willekeurige basis $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$ voor W.*

Gevolg: elke Euclidische ruimte heeft een orthonormale basis

Gram-Schmidt procedure

Laat $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}\}$ een basis van W zijn.

1. Kies $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$. $\{\mathbf{v_1}\}$ is een (orthogonale) basis voor $W_1 =$span $\{\mathbf{u_1}\}$.
2. Zoek een vector $\mathbf{v_2}$ loodrecht op $\mathbf{v_1}$ in de deelruimte $W_2 = \text{span } \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} = \text{span } \{\mathbf{v_1}, \mathbf{u_2}\}$.

   $$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \text{proj}_{W_1}\mathbf{u_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1}.$$

   Nu is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ een orthogonale basis van W_2

3. Zoek nu $\mathbf{v_3}$ in $W_3 = \text{span}\ \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ =span $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{u_3}\}$ loodrecht op $\mathbf{v_1}$ en $\mathbf{v_2}$.

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \text{proj}_{W_2}\mathbf{u_3} = \mathbf{u_3} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2}.$$

Nu is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ een orthogonale basis van W_3

4. Zoek nu $\mathbf{v_4}$ in W_4 =span $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\} = \text{span}\ \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{u_4}\}$ loodrecht op W_3.

$$\mathbf{v_4} = \mathbf{u_4} - \text{proj}_{W_3}\mathbf{u_4} = \mathbf{u_4} - \frac{(\mathbf{u_4}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} - \frac{(\mathbf{u_4}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2} - \frac{(\mathbf{u_4}, \mathbf{v_3})}{(\mathbf{v_3}, \mathbf{v_3})}\mathbf{v_3}.$$

Nu is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ een orthogonale basis van W_4

5. Zo doorgaand vinden we een orthogonale basis (want m orthogonale dus lineair onafhankelijke vectoren)

$$T^* = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_m}\}$$

van W.

6. Een orthonormale basis T van W vinden we door elke vector in T^* te normeren:

$$T = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_m}\},$$

met

$$\mathbf{w_i} = \frac{1}{||\mathbf{v_i}||}\mathbf{v_i}$$

Voorbeeld

Laat $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ met

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Neem $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. $$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

3.

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6. Een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^3$ is $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ met

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w_3} = \frac{\sqrt{2}}{1}\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

Laat W het vlak met vergelijking $x + 2y - 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$ zijn. Een basis van W is

$$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Een orthonormale basis vinden we met Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-6}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$