Antwoorden lineaire algebra, 2DS06, opgaven week 1

1.1:1 3 keer de 1-e aftrekken van de 2-e: $-10y = -20$, dus $y = 2$, en $x = 4$, controleren, klopt.

3. Na eliminatie vind je $5y - 2z = -10$; $y = 2$; $x - y + z = 4$; en dus $y = 2$, $z = 10$, $x = -4$.

5. Kies een parameter voor z: $z = 4t$, dan $y = 8 + t$ en $x = -20$ (en dus onafhankelijk van t).

9. Strijdig.

19. a) $2 \times 1 + 3 \times (-1) - (-1) = 0$; $1 - 4 \times (-1) + 5 \times (-1) = 0$; b) invullen; cd) ja.

27. a) Geen; b) Een hele lijn, dus oneindig veel; c) geen.

31. Stel we produceren x ton gewone en y ton speciale plastic, dan hebben we $2x + 2y$ uur in fabriek A en $5x + 3y$ uur in fabriek B, dus als $2x + 2y = 8$ en $5x + 3y = 15$ dan worden beide fabrieken de hele tijd gebruikt, dus voor $x = 3/2$ en $y = 5/2$.

1.3:25. Klopt.

38. b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

40. Bijvoorbeeld $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, het enige wat nodig is, is dat de eerste en de derde kolom van A optellen tot $\mathbf{b}$.

43. a) $\sum ca_{ii} = c \sum a_{ii}$; b) $\sum (a_{ii} + b_{ii}) = \sum a_{ii} + \sum b_{ii}$; c) $\sum \sum a_{ij} b_{ji} = \sum \sum b_{ij} a_{ji}$; d) A^T heeft dezelfde diagonaal als A; e) dit is $\sum \sum a_{ij}^2$.

46. Klopt.

49. Labellen we de rijen van AB met C en T en de kolommen met SL en Ch, dan geeft de ij-entry de totale kosten om een $i = C$ of T te produceren in $j = SL$ of Ch.

51. a) Nee, $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \sum x_i^2 \geq 0$. b) Als $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = 0$ dan $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1.4:8. a) $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$; b)$A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$; c)$A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$; d) Met inductie, gebruik $\cos(k+1)\theta = \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta$ en $\sin(k+1)\theta = \cos k\theta \sin\theta + \sin k\theta \cos\theta$.

10. Flauw is $A = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$, minder flauw is $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, erg algemeen: kies a, b, c, d zó dat $ad - bc = 1$ en neem $A = \begin{bmatrix} ad + bc & -2ac \\ 2bd & -ad - bc \end{bmatrix}$ (alle oplossingen ongelijk $\pm I$ zijn van deze vorm).

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$, dus $r = 2$.

29. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 15 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$.

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 15 & -4 \end{bmatrix} = (AB)^T.$$

32. Als $AB = AC$, dan is $A(B - C) = O$ en omgekeerd, beginnen we dus met $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = O$, dan kunnen we nemen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.5:21 $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, zelfde voor $A^T A$.

22. a) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$; b) $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$;

32. $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

33. a) $A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

35. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

41. $\mathbf{x} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.