Antwoorden lineaire algebra, 2DS06, opgaven week 2

2.2:7 a) Vegen: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$, dus $x=-1$, $y=4$ en $z=-3$;
b) $x=y=z=0$; d) $z=0$, $y=t$, $x=-2t$.

9. b) $x=y=z=0$.

15. Vegen: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & a^2-1 & a+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{array}\right]$; hieruit volgt dat voor $a=\pm\sqrt{3}$ het stelsel strijdig is, voor andere a is er een unieke oplossing.

27. Vegen: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & a \\ 2 & -2 & 4 & b \\ -1 & 6 & -5 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & -5 & c \\ 0 & 10 & -6 & b+2c \\ 0 & 20 & -12 & a+3c \end{array}\right]$; door verder te vegen zien we dat $(a+3c)-2(b+2c)=a-2b-c=0$ moet gelden.

39. $a\,C_2H_6 + b\,O_2 \rightarrow c\,CO_2 + d\,H_2O$ dus C: $2a=c$; H: $6a=2d$; O: $2b=2c+d$; hieruit volgt $(a,b,c,d)=t(2,7,4,6)$.

41. Vegen: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3-i \\ i & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & i & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3-i \\ 0 & 1-i & 1 & 2-3i \\ 0 & 1 & i & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3-i \\ 0 & 1 & i & 3 \\ 0 & 0 & -i & -1 \end{array}\right]$;
we krijgen $z=-i$, $y=2$ en $x=1-i$.

2.3:8. Vegen: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$.

9. c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; d) niet inverteerbaar.

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
(de laatste factor is eigenlijk het product van 2 e.m.'s)

17. a) Ja, $[1,1,-2]^T$; c) nee.

21. Als $a \neq 0$ dan krijgen we na vegen de rij $[0,(ad-bc)/a]$, als $a=0$ maar $c \neq 0$, dan is de matrix alleen singulier als ook $b=0$. Dat A^{-1} deze vorm heeft volgt door uitvermenigvuldigen.

3.2:2d. $32+60-20=72$; **2f.** 0;

5. Je kunt de tweede matrix krijgen door i) derde kolom keer 4, ii) tweede kolom twee keer van derde kolom aftrekken, iii) derde rij keer een half. Determinant wordt: 4 keer $4 \times 1 \times \frac{1}{2}$ is 8.

8. Waar als A en B vierkant, dan geldt $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$. Voor niet-vierkante matrices is tenminste één van beide nul: $A = [\,1,0\,]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\det(AB)=1$, $\det(BA)=0$.

10. Voor elke rij kan er een factor k uit.

15. Als $A = A^{-1}$, dan $\det(A)^2 = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1$, dus $\det(A) = \pm 1$.

25b. De determinant is 13, dus de matrix is niet singulier.

27. De determinant $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, dus er is een niet triviale oplossing.

3.3:7a. $3 \times 2 - (-1) \times 2 = 8$; **b.** $(-1) \times (-3) \times (5) \times 3 = 45$; **c.** Doe zelf, det$=0$.

12. De determinant is $(t+1)(t+2)(t-1)$, dus nul voor $t=-2,-1,1$.

16. Opp. is $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$. Kan natuurlijk ook met basis keer hoogte.