TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 12-4-2011, 14.30-17.00 uur.

Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier, schrijfgerei, en eventueel een eenvoudige rekenmachine. Dus geen boeken, dictaten, aantekeningen, grafische rekenmachines of laptops.

Bij elk antwoord is een uitwerking of uitleg vereist. Succes!

Opgave 1
Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met parameters a, b, c en variabelen x, y, en z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 5z & = & a \\ 4x & - & 5y & + & 8z & = & b \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & c \end{array}$$

(a) Neem $a = 1$, $b = 7$, $c = -6$ en bepaal de algemene oplossing van het stelsel.

(b) Aan welke voorwaarde(n) moeten a, b en c voldoen, wil het stelsel oplosbaar zijn?

Opgave 2
Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 13 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is ook de matrix R in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met de uitgebreide matrix $[A|\mathbf{b}]$:

$$R = \mathrm{rref}([A|\mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(a) Geef een parametervoorstelling voor de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Geef een basis voor de nulruimte van A.

(c) Schrijf de laatste kolom van A als een lineaire combinatie van de overige kolommen.

(d) Wat is de rang van de getransponeerde matrix A^T? Leg uit.

Opgave 3
A en B zijn inverteerbare 3×3 matrices. Gegeven zijn A en $(AB)^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de matrix B.

(b) A is de overgangsmatrix van een basis T naar de standaardbasis S van $\mathbb{R}^3$. Compact genoteerd: $A = P_{S \leftarrow T}$ voor een basis T van $\mathbb{R}^3$. Bepaal deze basis T.

Opgave 4
Gegeven zijn de volgende vier vectoren in $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Laat S de verzameling bestaande uit de eerste drie vectoren zijn, dus $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ en laat W het opspansel zijn van $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$, dus $W = \text{span } S$.

(a) Laat zien dat S een basis is voor de deelruimte W van $\mathbb{R}^4$.

(b) Laat zien dat de vector $\mathbf{u_4}$ in de deelruimte W zit en bepaal de coördinaatvector $[\mathbf{u_4}]_S$ van de vector $\mathbf{u_4}$ ten opzichte van de basis S van W.

(c) Breid S uit tot een basis van $\mathbb{R}^4$ (m.a.w. geef een basis van $\mathbb{R}^4$ die $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ bevat).

(d) Bepaal een orthonormale basis T voor $W = \text{span } \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

Opgave 5
Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{u}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat $\mathbf{u}$ een eigenvector van A is.

(b) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix A.

(c) Geef bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(d) Is A diagonaliseerbaar? Leg uit.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	4	2	a:	3	3	a:	4	4	a:	2	5	a:	1
	b:	4		b:	2		b:	2		b:	2		b:	4
				c:	2					c:	3		c:	4
				d:	1					d:	5		d:	2

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.