TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 16-4-2012, 14.30-17.00 uur.

Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier, schrijfgerei, en eventueel een eenvoudige rekenmachine. Dus geen grafische rekenmachine of laptop.

Bij elk antwoord is een uitwerking of uitleg vereist. Succes!

Opgave 1
Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Bepaal een matrix in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met A.

(c) Geef een basis van de nulruimte van A.

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(e) Geef een basis van de rijruimte van A.

Opgave 2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de inverse van bovenstaande matrix B.

(b) $B = P_{T \leftarrow S}$ is de overgangsmatrix van de standaardbasis $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ naar een andere basis T van $\mathbb{R}^3$. Bepaal die basis T.

Opgave 3

Gegeven zijn de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ lineair onafhankelijk is.

(b) Bepaal een orthogonale basis S voor de deelruimte U van $\mathbb{R}^4$ die opgespannen wordt door $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.

(c) Bepaal de loodrechte projectie van $\mathbf{u_3}$ op de deelruimte U.

(d) Bepaal een orthonormale basis T voor de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ die opgespannen wordt door $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$.

Opgave 4

Gegeven is de matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A.

(b) Bepaal bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(c) Geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $P^{-1}AP = D$.

(d) Bestaat er ook een orthogonale matrix Q zodanig dat $Q^T AQ = D$? Geef zo'n orthogonale matrix Q of leg uit waarom deze niet bestaat.

(e) Bepaal de oplossing $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ van het beginwaardeprobleem gegeven door

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \ \text{ en } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(f) Bepaal de eigenwaarden van de matrix A^4.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	2	2	a:	4	3	a:	4	4	a:	4
	b:	3		b:	2		b:	2		b:	5
	c:	3					c:	2		c:	1
	d:	2					d:	3		d:	2
	e:	2								e:	3
										f:	1

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.