TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 23-3-2007, 14.30-17.00 uur.

Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier en schrijfgerei. Dus geen boeken, dictaten, aantekeningen, rekenmachines of laptops.
Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Succes!

Opgave 1
De volgende matrix A en vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven. De matrix A bevat een parameter k die een een willekeurig reëel getal voorstelt.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & k \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Voor welke waarde(n) van de parameter k is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ strijdig (=inconsistent)?

(b) Neem $k = 3$ en bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 2
Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal een basis van de kolomruimte van A.

(b) Wat is de dimensie van de nulruimte van A? Leg uit.

(c) Is A inverteerbaar? Leg uit.

Opgave 3
De afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat L een lineaire transformatie is.

(b) Geef de matrixrepresentatie A van L ten opzichte van de standaard basis S van $\mathbb{R}^3$.

(c) Geef de matrixrepresentatie B van L ten opzichte van de onderstaande basis T van $\mathbb{R}^3$.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Geef een inverteerbare matrix P waarvoor geldt dat $B = P^{-1}AP$.

Opgave 4

De vectoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ spannen een driedimensionale deelruimte V op van $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis S voor V.

(b) Geef de coördinaatvector van $\mathbf{u_3}$ ten opzichte van de orthonormale basis S.

Opgave 5

Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A.

(b) Geef bij elke eigenwaarde een eigenvector.

(c) Is A diagonaliseerbaar? Leg uit.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	4	2	a:	4	3	a:	2	4	a:	5	5	a:	4
	b:	4		b:	2		b:	2		b:	3		b:	4
				c:	2		c:	5					c:	2
							d:	2						

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.