TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 13-3-2009, 14.30-17.00 uur.

Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier, schrijfgerei, en eventueel een eenvoudige rekenmachine. Dus geen boeken, dictaten, aantekeningen, grafische rekenmachines of laptops.
Bij elk antwoord is een uitwerking of uitleg vereist. Succes!

Opgave 1
Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met parameter a en variabelen x, y en z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & a \end{array}$$

(a) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel als $a = 2$.

(b) Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel geen oplossing?

(c) Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel precies één oplossing?

Opgave 2
Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de determinant van A.

(b) Wat is de oppervlakte van de driehoek in het platte vlak met hoekpunten $(1, 1)$, $(-2, -2)$ en $(3, 4)$?

Opgave 3
Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ en $\mathbf{v_4}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Schrijf $\mathbf{v_4}$ als een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_3}$.

(b) Is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ lineair onafhankelijk?

(c) Bepaal de dimensie van span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.

Opgave 4
Gegeven zijn de matrix A en de vector b.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 6 & 22 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 41 \\ 2 \\ 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Gegeven is ook de matrix R in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met de uitgebreide matrix $[A|\mathbf{b}]$.

$$R = \text{rref}([A|\mathbf{b}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(a) Geef een basis voor de kolom-ruimte van A.

(b) Geef een basis voor de nulruimte van A.

(c) Geef een parametervoorstelling voor de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Opgave 5
Gegeven zijn de matrix A en de vectoren $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$ eigenvectoren van A zijn.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van A.

(c) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix A en geef bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

(e) Bepaal de cosinus van de hoek tussen $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.

(f) Construeer met behulp van de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis voor de deelruimte van $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de vectoren $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.

(g) Bewijs dat PDP^{-1} een symmetrische matrix is als gegeven is dat P een orthogonale matrix is en D een diagonaalmatrix van dezelfde afmetingen.

(h) Bestaat er een orthonormale basis van de $\mathbb{R}^3$ die geheel bestaat uit eigenvectoren van de matrix A? Leg uit.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	4	2	a:	3	3	a:	4	4	a:	2	5	a:	2
	b:	2		b:	1		b:	2		b:	3		b:	4
	c:	1					c:	2		c:	2		c:	2
													d:	2
													e:	2
													f:	4
													g:	2
													h:	1

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.