Beknopte uitwerking eerste tussentoets Lin. Alg. voor ST (2DS06) feb. 2011.

Opgave 1
Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen waarin de parameter a een willekeurig reëel getal voorstelt.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 5 \\ 4x & + & y & + & (a^2-2)z & = & a+7 \end{array}$$

(a) Bepaal een parametervoorstelling van de algemene oplossing van het stelsel als $a = 2$. Controleer je antwoord.

Antw. Na vegen krijgen we: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$, met oplossing: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Voor welke waarden van a heeft het stelsel precies één oplossing? Voor welke waarden van a is er geen oplossing? Voor welke waarden van a zijn er oneindig veel oplossingen?

Antw. De determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & a^2-2 \end{vmatrix} = 28 - 7a^2$. Voor $a \neq \pm 2$ is dit ongelijk 0 en is er precies één oplossing. Voor $a = 2$ hebben we al gezien dat er oneindig veel zijn, voor $a = -2$ is het stelsel strijdig, dus geen oplossing.

Opgave 2
De volgende matrix A is gegeven.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de determinant van A.

Antw. Ontwikkel naar de eerste rij: $\det(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-2-4) = 2.$

(b) Gegeven is dat de 4×4 matrix B determinant 5 heeft. Bepaal de determinant van de matrix

$$2B(A^TA^{-1})$$

Antw. $\det(A) = \det(A^T)$, dus $\det(A^TA^{-1}) = 1$. Blijft over $\det(2B) = 2^4\det(B) = 80$, de exponent 4 is er omdat B een 4×4 matrix is.

(c) Bepaal de inverse van A. Controleer je antwoord.

Antw. We bepalen de inverse van de matrix door $[A \,|\, I]$ te vegen naar $[I \,|\, A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim\sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right], \text{ dus } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) Bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Antw. Met de inverse: $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -3 \\ 11/2 \end{bmatrix}.$

Opgave 3

Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ en $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

(a) Is $\mathbf{b}$ een lineaire combinatie van $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$? Leg uit.

Antw. Om te kijken of $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}$ een oplossing heeft vegen we de matrix $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \end{array}\right]$. Er is dus een oplossing (oneindig veel).

(b) Zijn $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ lineair onafhankelijk? Leg uit.

Antw. Uit de vegerij bij onderdeel (a) zien we dat ook $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 = 0$ een niet triviale (d.w.z.$\neq (0, 0, 0)$) oplossing heeft, dus ze zijn niet onafhankelijk.

(c) Spannen $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ en $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^3$ op? Leg uit.

Antw. Het opspansel van deze vier vectoren is gelijk aan het vlak opgespannen door $\mathbf{u}_1$ en $\mathbf{u}_2$ omdat $\mathbf{u}_3$ afhankelijk is van deze twee, en $\mathbf{b}$ dus ook. Ze spannen $\mathbb{R}^3$ dus *niet* op.

(d) Bepaal een vector in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op $\mathbf{u_2}$ en lengte 1 heeft.

Antw. $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en één van de vele vectoren loodrecht daarop is $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, delen we deze door zijn lengte $\sqrt{13}$ dan vinden we een antwoord. Een andere leuke mogelijkheid is $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{3}$.