TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 12-4-2011, 14.30-17.00 uur.

Opgave 1

Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met parameters a, b, c en variabelen x, y, en z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 5z & = & a \\ 4x & - & 5y & + & 8z & = & b \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & c \end{array}$$

(a) Neem $a = 1$, $b = 7$, $c = -6$ en bepaal de algemene oplossing van het stelsel.
Antwoord:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 4 & -5 & 8 & 7 \\ -3 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -12 & 3 \\ 0 & -3 & 12 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus kies $z = r$ vrij, en dan volgt $x = 3 + 3r$ en $y = 1 + 4r$, met $r \in \mathbb{R}$. Of als vectorvoorstelling:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

(b) Aan welke voorwaarde(n) moeten a, b en c voldoen, wil het stelsel oplosbaar zijn?
Antwoord:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 4 & -5 & 8 & b \\ -3 & 3 & -3 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 0 & 3 & -12 & b-4a \\ 0 & -3 & 12 & c+3a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & a \\ 0 & 1 & -4 & (b-4a)/3 \\ 0 & 0 & 0 & -a+b+c \end{bmatrix}$$

Dus het stelsel is consistent precies dan als er in de laatste rij een nulrij onstaat (en niet de strijdige vergelijking $0 = 1$), d.w.z. precies dan als $-a + b + c = 0$. De voorwaarde waaraan de parameters moeten voldoen is dus $a = b + c$.

Opgave 2

Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 13 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Gegeven is ook de matrix R in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met de uitgebreide matrix $[A|\mathbf{b}]$:

$$R = \text{rref}([A|\mathbf{b}]) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(a) Geef een parametervoorstelling voor de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Antwoord:
Deze lezen we af uit de gereduceerde trapvorm, net als bij opgave 1(a). Kies $x_3 = r$ en $x_5 = s$ vrij in $\mathbb{R}$ (kolommen zonder spil). Dan $x_1 = 3 + 2r - s$, $x_2 = 4 - 3r - 2s$, en $x_4 = 5 + s$. Of in vectornotatie:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

(b) Geef een basis voor de nulruimte van A.
Antwoord:
De nulruimte van A is de verzameling van alle vectoren $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^5$ waarvoor geldt dat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gevonden bij (a), is van de vorm $\mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$ met

$$\mathbf{x_p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ een particuliere oplossing van } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\text{, en}$$

$$\mathbf{x_h} = r \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R}) \text{ de algemene oplossing van } A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Een basis voor de nulruimte van A is dus

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Schrijf de laatste kolom van A als een lineaire combinatie van de overige kolommen.
Antwoord:
Uit het feit dat de vector $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in de nulruimte van A zit kunnen we afleiden dat

$$-\mathbf{a_1} - 2\mathbf{a_2} + \mathbf{a_4} + \mathbf{a_5} = \mathbf{0},$$

met $\mathbf{a_i}$ de i-de kolom van A. Dus we kunnen $\mathbf{a_5}$ als volgt schrijven als lineaire combinatie van de overige kolommen:

$$\mathbf{a_5} = \mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2} - \mathbf{a_4}$$

(d) Wat is de rang van de getransponeerde matrix A^T? Leg uit.
Antwoord:
De rang van A is 3 (drie leidende enen of spillen in de gereduceerde trapvorm) dus de rang van A^T is ook 3. De (rij)rang van A^T is namelijk de dimensie van de rijruimte van A^T en dat is de dimensie van de kolomruimte van A en dat is de (kolom)rang van A. Je gebruikt kortom dat de rijrang en de kolomrang beide gelijk zijn aan de rang.

Opgave 3

A en B zijn inverteerbare 3×3 matrices. Gegeven zijn A en $(AB)^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de matrix B.
Antwoord:
$B^{-1} = B^{-1}(A^{-1}A) = (B^{-1}A^{-1})A = (AB)^{-1}A =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan kan B gevonden worden door de inverse te bepalen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$B = (B^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 3 & -9 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) A is de overgangsmatrix van een basis T naar de standaardbasis S van $\mathbb{R}^3$. Compact genoteerd: $A = P_{S \leftarrow T}$ voor een basis T van $\mathbb{R}^3$. Bepaal deze basis T.
Antwoord:
In de kolommen van $P_{S \leftarrow T}$ staan de basisvectoren van T geschreven ten opzichte van de standaardbasis S. M.a.w. de basis T bestaat uit de kolommen van A:

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 4

Gegeven zijn de volgende vier vectoren in $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Laat S de verzameling bestaande uit de eerste drie vectoren zijn, dus $S = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ en laat W het opspansel zijn van $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$, dus $W = \text{span } S$.

(a) Laat zien dat S een basis is voor de deelruimte W van $\mathbb{R}^4$.
Antwoord:
S spant per definitie W op, dus het is voldoende te laten zien dat S lineair onafhankelijk is. De vector-vergelijking

$$a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + a_3\mathbf{u_3} = \mathbf{0}$$

is in feite een stelsel van vier vergelijkingen in de onbekenden a_1, a_2, a_3 met uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

en uit de conclusie dat $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ volgt dat S lineair onafhankelijk is.

(b) Laat zien dat de vector $\mathbf{u_4}$ in de deelruimte W zit en bepaal de coördinaatvector $[\mathbf{u_4}]_S$ van de vector $\mathbf{u_4}$ ten opzichte van de basis S van W.
Antwoord:
Het stelsel vergelijkingen corresponderend met

$$a_1\mathbf{u_1} + a_2\mathbf{u_2} + a_3\mathbf{u_3} = \mathbf{u_4}$$

heeft uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Het stelsel is consistent, dus $\mathbf{u_4}$ zit in $W = \text{span } S$. De oplossing is $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = -1$ en hieruit volgt dat $\mathbf{u_4} = 3\mathbf{u_1} + 2\mathbf{u_2} - \mathbf{u_3}$ ofwel dat

$$[\mathbf{u_4}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Breid S uit tot een basis van $\mathbb{R}^4$ (m.a.w. geef een basis van $\mathbb{R}^4$ die $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$ bevat).
Antwoord:
Breid S uit met alle standaard-basisvectoren van $\mathbb{R}^4$ en bepaal een lineair onafhankelijke deelverzameling van die verzameling vectoren. Om te zorgen dat de vectoren van S gekozen worden zetten we S links in de matrix.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrrr} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Leidende enen staan in de eerste vier kolommen dus $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{e_1}\}$ is een basis van W, waarbij $\mathbf{e_1}$ de eerste standaard-basisvector van $\mathbb{R}^4$ is.
NB: ook elk van de andere standaard-basisvectoren geeft een lineair onafhankelijke uitbreiding van S.

(d) Bepaal een orthonormale basis T voor $W = \text{span}\,\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.
Antwoord:
Gebruik de Gram-Schmidt procedure om de gegeven basis S van W om te vormen tot een orthonormale basis van W:

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1},$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{u_1}}{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-2}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ of liever } \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \frac{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{u_3}}{\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_1}}\mathbf{v_1} - \frac{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{u_3}}{\mathbf{v_2}\cdot\mathbf{v_2}}\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{30}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ of } \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dan normeren:

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w_2} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w_3} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

De gevraagde orthonormale basis is $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$.

Opgave 5
Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{u}$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat $\mathbf{u}$ een eigenvector van A is.
Antwoord:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dus $\mathbf{u}$ is een eigenvector van A bij eigenwaarde 3.

(b) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix A.
Antwoord:
Bepaal het karakteristiek polynoom $\det(\lambda I - A)$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} &= (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & \lambda-3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ (\lambda-4)^2(\lambda-3) - (\lambda-3) &= (\lambda-3)((\lambda-4)^2-1) = (\lambda-3)(\lambda^2-8\lambda+15) = (\lambda-3)^2(\lambda-5) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking nul stellen levert de eigenwaarden: $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = 5$.

(c) Geef bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

Antwoord:

De eigenruimte E_3 bij $\lambda = 3$ is de nulruimte van $3I - A$. Het stelsel $(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft uitgebreide matrix

$$3I - A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus $(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oplossen geeft $x_2 = r \in \mathbb{R}$, $x_3 = s \in \mathbb{R}$, en $x_1 = -x_3 = -s$, of in vectornotatie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Een basis voor de eigenruimte E_3 is dus

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

De eigenruimte E_5 bij $\lambda = 5$ is de nulruimte van $5I - A$. Het stelsel $(5I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft uitgebreide matrix

$$5I - A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dus $(5I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oplossen geeft $x_3 = r \in \mathbb{R}$, $x_2 = 2x_3 = 2r$, en $x_1 = x_3 = r$, of in vectornotatie

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

Een basis voor de eigenruimte E_5 is dus

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) Is A diagonaliseerbaar? Leg uit.

Antwoord:

Ja, want er zijn in totaal drie lineair onafhankelijke eigenvectoren gevonden, twee bij de eigenwaarde van multipliciteit 2. Dus er bestaat een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$