TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 13-3-2009, 14.30-17.00 uur.

Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier, schrijfgerei, en eventueel een eenvoudige rekenmachine. Dus geen boeken, dictaten, aantekeningen, grafische rekenmachines of laptops.
Bij elk antwoord is een uitwerking of uitleg vereist. Succes!

Opgave 1
Gegeven is het volgende stelsel lineaire vergelijkingen met parameter a en variabelen x, y en z.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & 5z & = & a \end{array}$$

(a) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel als $a = 2$.
Oplossing: reduceer de uitgebreide (geaugmenteerde) matrix behorende bij het stelsel met Gauss-eliminatie naar trapvorm.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & a \\ 0 & -4 & 14 & 4-3a \\ 0 & -6 & 21 & 5-4a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -5 & a \\ 0 & 2 & -7 & -2+3/2a \\ 0 & 0 & 0 & -1+1/2a \end{array}\right]$$

Als $a = 2$ is de laatste rij een nulrij, en is het stelsel consistent. Er zijn twee spillen (corresponderend met x en y) en een vrije variabele (z). Als we stellen $z = r$, dan volgt $2y = 1 + 7r$ en $x = 2 - (1 + 7r) + 5r = 1 - 2r$. Een parametervoorstelling van de algemene oplossing is dus:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 7/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel geen oplossing?
Antwoord: Het stelsel is strijdig als Gauss-Jordan reductie een rij

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

oplevert. Dit is het geval als $-1 + 1/2a \neq 0$ dus als $a \neq 2$.

(c) Voor welke waarde(n) van a heeft het stelsel precies één oplossing?
Antwoord: Nooit. Het stelsel is strijdig voor $a \neq 2$ (zie (b)) en heeft oneindig veel oplossingen als $a = 2$ (zie (a)).

Opgave 2

Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de determinant van A.
Oplossing:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot 3) = -3$$

(b) Wat is de oppervlakte van de driehoek in het platte vlak met hoekpunten $(1,1)$, $(-2,-2)$ en $(3,4)$?
Antwoord:

$$\frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-3| = \frac{3}{2}$$

Opgave 3
Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ en $\mathbf{v_4}$ in $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Schrijf $\mathbf{v_4}$ als een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_3}$.
Antwoord: stel $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = v_4$; dit geeft een lineair stelsel in de onbekenden a_1, a_2, a_3. Gauss-Jordan reductie op de uitgebreide matrix van dit stelsel levert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt dat $a_1 = -8$, $a_2 = 17$ en $a_3 = -5$ ofwel $v_4 = -8v_1 + 17v_2 - 5v_3$. Controle: inderdaad geldt

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 17 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ lineair onafhankelijk?
Antwoord: ja, want stel $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + a_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$, dan leiden we af uit het veegproces bij (a) dat vegen van de uitgebreide matrix van dit stelsel het volgende zal opleveren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Dus $a_1 = 0, a_2 = 0$ en $a_3 = 0$. Het feit dat alleen de triviale lineaire combinatie van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_3}$ de nulvector oplevert betekent per definitie dat $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ lineair onafhankelijk is.

(c) Bepaal de dimensie van span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$.
Oplossing: de gevraagde dimensie is gelijk aan de dimensie van de kolomruimte van de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{(zie (a))}$$

Omdat de (gereduceerde) trapvorm van deze matrix drie spillen heeft, is die dimensie 3.

Of anders: omdat $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ lineair onafhankelijk is, is de dimensie van span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ gelijk aan 3. Omdat $\mathbf{v_4}$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ en $\mathbf{v_3}$ is span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\} =$ span$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$.

Opgave 4
Gegeven zijn de matrix A en de vector b.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 & 6 & 22 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 41 \\ 2 \\ 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Gegeven is ook de matrix R in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met de uitgebreide matrix $[A|\mathbf{b}]$.

$$R = \text{rref}([A|\mathbf{b}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

.

(a) Geef een basis voor de kolom-ruimte van A.
Oplossing: Een basis voor de kolomruimte wordt gevormd door de kolommen van A corresponderend met de spil-kolommen in rref(A), dus (aangezien rref(A) bestaat uit de eerste vijf kolommen van rref$([A|\mathbf{b}]) = R$)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

is een basis van de kolomruimte van A.

(b) Geef een basis voor de nulruimte van A. De nulruimte van A bestaat uit die vectoren $\mathbf{x}$ waarvoor $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en de algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vind je door $[A|\mathbf{0}]$ te vegen naar

$$[\text{rref}(A)|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De algemene oplossing is $x_3 = r$, $x_5 = s$, $x_1 = 2r - s$, $x_2 = -3r + s$, $x_4 = -4s$, voor $r, s \in \mathbb{R}$. Een parametervoorstelling van alle vectoren in de nulruimte is dus

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Een basis voor de nulruimte is daarom

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Geef een parametervoorstelling voor de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Oplossing: zo'n parametervoorstelling wordt gegeven door een particuliere oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (bijv. die overeenkomend met de zesde kolom van R) te combineren met de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dus

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 5
Gegeven zijn de matrix A en de vectoren $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$ eigenvectoren van A zijn.
Oplossing:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

m.a.w. $A\mathbf{u_1} = 0 \cdot \mathbf{u_1}$ en $A\mathbf{u_2} = 0 \cdot \mathbf{u_2}$, dus $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$ zijn eigenvectoren van A bij eigenwaarde 0.

(b) Bepaal het karakteristiek polynoom van A.
Oplossing: het karakteristiek polynoom is gelijk aan (ontwikkeling naar eerste rij)

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -2 \\ -4 & \lambda - 2 & -4 \\ -2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-2)\begin{vmatrix} -4 & \lambda-2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda)-4\lambda-4\lambda = \lambda^3-6\lambda^2$$

(c) Bepaal alle eigenwaarden van de matrix A en geef bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.
Oplossing: De eigenwaarden zijn de nulpunten van het karakteristiek polynoom $\lambda^3-6\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-6)$. Dus de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ en $\lambda_3 = 6$ (de multipliciteit van eigenwaarde 0 is 2 dus dim $E_0 \leq 2$). De eigenvectoren $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$ bij eigenwaarde 0 zijn lineair onafhankelijk (want geen veelvoud van elkaar). De dimensie van E_0 is dus 2 en een basis voor E_0 is

$$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$$

Om een eigenvector $\mathbf{x}$ te vinden bij eigenwaarde 6 lossen we op $(6I-A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lrr|r} 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lrr|r} 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Na stellen van $x_3 = r$ volgt $x_2 = 2r$ en $4x_1 = 2r + 2r = 4r$, dus de algemene oplossing is

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Een basis van E_6 is dus

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.
Oplossing: De formule voor de algemene oplossing is voor een diagonaliseerbare matrix A

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{p_1}e^{\lambda_1 t} + b_2\mathbf{p_2}e^{\lambda_2 t} + b_3\mathbf{p_3}e^{\lambda_3 t}$$

waarbij de λ_i de eigenwaarden van A zijn, de $\mathbf{p_i}$ de kolommen zijn van een matrix P die A diagonaliseert, dus eigenvectoren bij deze eigenwaarden, en de b_i willekeurige constanten in $\mathbb{R}$. In dit geval vinden we

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}, \quad \text{met } b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$$

(e) Bepaal de cosinus van de hoek tussen $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.
Antwoord:

$$\cos(\phi) = \frac{(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2})}{||\mathbf{u_1}||||\mathbf{u_2}||} = \frac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(f) Construeer met behulp van de methode van Gram-Schmidt een orthonormale basis voor de deelruimte van $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de vectoren $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.
Oplossing: Neem $\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$ em

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

Dan geldt voor

$$\mathbf{w_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{w_2} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dat $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ een orthonormale basis is van span$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$.

(g) Bewijs dat PDP^{-1} een symmetrische matrix is als gegeven is dat P een orthogonale matrix is en D een diagonaalmatrix van dezelfde afmetingen.
Bewijs:

$$(PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^T DP^{-1} = PDP^{-1}$$

Hier gebruik je dat $(AB)^T = B^T A^T$ voor alle matrices A en B, dat P orthogonaal is en daarom $P^{-1} = P^T$, dat een diagonaalmatrix symmetrisch is ($D^T = D$), en dat $(A^T)^T = A$ voor elke vierkante matrix A.

(h) Bestaat er een orthonormale basis van de $\mathbb{R}^3$ die geheel bestaat uit eigenvectoren van de matrix A? Leg uit.
Antwoord: nee, want stel van wel, dan zou de orthogonale matrix P met die orthonormale basis in de kolommen de matrix A diagonaliseren: $P^{-1}AP = D$ ofwel $PDP^{-1} = A$ voor een diagonaalmatrix D. Maar bij (g) is bewezen dat A dan symmetrisch moet zijn, wat niet het geval is.

Ook goed is de volgende redenering: nee, want de eigenruimten E_0 en E_6 staan niet loodrecht op elkaar. Preciezer gezegd: stel $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ is een basis van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit eigenvectoren van A. Zeg $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$ vormt een basis van E_0, en $\{\mathbf{x_3}\}$ is een basis van E_6. Er geldt dan dat $\mathbf{x_3}$ van de vorm

$$\mathbf{x_3} = r\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

is met $r \neq 0$. Je kunt eenvoudig controleren dat het inproduct van $\mathbf{x_3}$ met $\mathbf{u_1}$ gelijk is aan $-2r + 4r + r = 3r \neq 0$, dus dat $\mathbf{u_1}$ niet loodrecht staat op $\mathbf{x_3}$. Maar $\mathbf{u_1}$ is een lineaire combinatie van de basisvectoren $\mathbf{x_1}$ en $\mathbf{x_2}$ van E_0 dus als $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ een *orthonormale* basis van $\mathbb{R}^3$ zou zijn, dan zou vanwege

$$(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_3}) = 0 \text{ en } (\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}) = 0$$

ook $\mathbf{u_1}$ loodrecht op $\mathbf{x_3}$ moeten staan. Hieruit volgt dat de basis $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ niet orthonormaal kan zijn.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	4	2	a:	3	3	a:	4	4	a:	2	5	a:	2
	b:	2		b:	1		b:	2		b:	3		b:	4
	c:	1					c:	2		c:	2		c:	2
													d:	2
													e:	2
													f:	4
													g:	2
													h:	1

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.