TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 16-4-2012, 14.30-17.00 uur.

Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier, schrijfgerei, en eventueel een eenvoudige rekenmachine. Dus geen grafische rekenmachine of laptop.

Bij elk antwoord is een uitwerking of uitleg vereist. Succes!

Opgave 1
Gegeven zijn de matrix A en de vector $\mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat de vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Antwoord: reken het matrix-vector product $A\mathbf{x}$ uit en ga na dat dit de vector $\mathbf{b}$ oplevert.

(b) Bepaal een matrix in gereduceerde trapvorm die rij-equivalent is met A.

Antwoord:

$$R = \mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Geef een basis van de nulruimte van A.

Antwoord: Los op $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Equivalent is het stelsel: $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We kiezen dus vrije variabelen voor de kolommen zonder leidende enen in R: $x_2 = r$, $x_4 = s$ en $x_5 = t$, met $r, s, t \in \mathbb{R}$. De overige variabelen liggen dan vast door $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$: $x_1+3x_2+4x_4+2x_5 = 0$ dus $x_1 = -3r - 4s - 2t$, en $x_3 + 2x_4 = 0$ dus $x_3 = -2s$, en $x_6 = 0$. Een parametervoorstelling in vectornotatie van de nulruimte (i.e. van de algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) is dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ r, s, t \in \mathbb{R}$$

Een basis voor de nulruimte is

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Antwoord: een particuliere oplossing $\mathbf{x_p}$ van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is gegeven bij (a), de algemene oplossing $\mathbf{x_h}$ van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is gevonden bij (b). De algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan dan geschreven worden als $\mathbf{x} = \mathbf{x_p} + \mathbf{x_h}$, ofwel

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e) Geef een basis van de rijruimte van A.

Antwoord: de niet-nul rijen van de geveegde matrix R vormen een basis van de rijruimte van A. Dus een basis is

$$\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \}.$$

NB: de eerste drie rijen van A zijn afhankelijk dus vormen geen basis van de rijruimte.

Opgave 2

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de inverse van bovenstaande matrix B.

Antwoord:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{array}\right]$$

dus

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

(c) $B = P_{T \leftarrow S}$ is de overgangsmatrix van de standaardbasis $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ naar een andere basis T van $\mathbb{R}^3$. Bepaal die basis T.

Antwoord: als $B = P_{T \leftarrow S}$ dan $B^{-1} = P_{S \leftarrow T}$, dus in de kolommen van de matrix B^{-1} staan de coördinaatvectoren ten opzichte van de standaardbasis S van de basisvectoren van T. Kortom

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{bmatrix} \right\}$$

Opgave 3

Gegeven zijn de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Laat zien dat $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ lineair onafhankelijk is.

Antwoord: los op $c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2} + c_3\mathbf{u_3} = \mathbf{0}$. Vanwege

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

heeft dit stelsel alleen de oplossing $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Maar dat betekent dat de drie vectoren lineair onafhankelijk zijn.

(b) Bepaal een orthogonale basis S voor de deelruimte U van $\mathbb{R}^4$ die opgespannen wordt door $\mathbf{u_1}$ en $\mathbf{u_2}$.

Antwoord: Gram-Schmidt geeft

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Nemen we voor $\mathbf{v_2}$ de geheeltallige vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in dezelfde richting (om het rekenwerk te vereenvoudigen), dan is een orthogonale basis voor span$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$

$$\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Bepaal de loodrechte projectie van $\mathbf{u_3}$ op de deelruimte U.

Antwoord: aangezien $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ een orthogonale basis van U is, kan de projectie geschreven worden als

$$\mathrm{proj}_U(\mathbf{u_3}) = \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} + \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2} = \frac{3}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(d) Bepaal een orthonormale basis T voor de deelruimte van $\mathbb{R}^4$ die opgespannen wordt door $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ en $\mathbf{u_3}$.

Antwoord: we vervolgen het Gram-Schmidt orthogonalisatieproces met de vector $\mathbf{u_3}$ en gebruiken ook het resultaat van (c).

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2} = \mathbf{u_3} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{u_3}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}.$$

Vervangen we $\mathbf{v_3}$ door de geheeltallige vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, dan is $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ een orthogonale basis voor span$\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ en een orthonormale basis bestaat uit de genormaliseerde vectoren:

$$T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Opgave 4

Gegeven is de matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A.

Antwoord: De eigenwaarden zijn de nulpunten van het karakteristiek polynoom

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 1) - (\lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 5\lambda + 5 - 1) = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 1$.

(b) Bepaal bij elke eigenwaarde een basis voor de eigenruimte.

Antwoord: De eigenruimte bij eigenwaarde λ is de nulruimte van de matrix $\lambda I - A$. Los dus het stelsel $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ op voor elk van de drie gevonden waarden voor λ. Voor $\lambda_1 = 3$ vinden we

$$3I - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus $(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als $x_1 + x_3 = 0$ en $x_2 = 0$. Kies $x_3 = r$ vrij in $\mathbb{R}$ dan volgt $x_1 = -r$ dus

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Een basis van de eigenruimte bij eigenwaarde 3 is dus

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Evenzo vinden we de basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

van de eigenruimte bij eigenwaarde 4 en basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

van de eigenruimte bij eigenwaarde 1.

(c) Geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $P^{-1}AP = D$.

Antwoord:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Bestaat er ook een orthogonale matrix Q zodanig dat $Q^T AQ = D$? Geef zo'n orthogonale matrix Q of leg uit waarom deze niet bestaat.

Antwoord: jazeker, zo'n Q bestaat want A is een symmetrische matrix ($A^T = A$). De eigenvectoren zijn paarsgewijs orthogonaal, en daarom verkrijgt men een orthogonale matrix (waarvan de kolommen een orthonormale basis van $\mathbb{R}^3$ vormen) door de kolommen van P te normaliseren:

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

(e) Bepaal de oplossing $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ van het beginwaardeprobleem gegeven door

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \text{ en } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Antwoord: de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen zonder rekening te houden met de beginconditie is

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{p_1}e^{\lambda_1}t + c_2\mathbf{p_2}e^{\lambda_2}t + c_3\mathbf{p_3}e^{\lambda_3}t,$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de eigenwaarden en $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}$ de bijbehorende eigenvectoren van de matrix en c_1, c_2, c_3 willekeurige constanten in $\mathbb{R}$. Dus in dit geval

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

De oplossing van het beginwaardenprobleem geeft een invulling aan de constanten c_1, c_2, c_3. De goede waarden vind je door $t = 0$ in te vullen in de algemene oplossing, en deze gelijk te stellen aan de gegeven $\mathbf{x}(0)$.

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Het stelsel

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

geeft de oplossing $c_1 = 1, c_2 = 2/3, c_3 = 4/3$, dus de oplossing van het beginwaarde probleem is

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + 2/3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + 4/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t}.$$

(f) Bepaal de eigenwaarden van de matrix A^4.

Antwoord: Als x een eigenvector is van A bij eigenwaarde λ, dan is $A^4x = A^3Ax = A^3\lambda x = \lambda A^3 x = \cdots A\lambda^3 x = \lambda^3 Ax = \lambda^4 x$, dus x is ook een eigenvector van A^4 bij eigenwaarde λ^4. In dit geval vinden we de eigenwaarden $3^4 = 81$, $4^4 = 256$ en $1^4 = 1$ van A^4.

Een andere manier om dit alles in te zien gaat als volgt: omdat $A = PDP^{-1}$ is

$$A^4 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^4P^{-1}$$

A^4 is dus diagonaliseerbaar en de eigenwaarden van A^4 staan in de diagonaal van de diagonaalmatrix D^4 (de eigenvectoren staan in de kolommen van P, dit zijn dus dezelfde als de eigenvectoren van A). Met andere woorden, als $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eigenwaarden van A zijn, dan zijn $\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4$ eigenwaarden van A^4. In dit geval vinden we de eigenwaarden $3^4 = 81$, $4^4 = 256$ en $1^4 = 1$ van A^4.