TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Lineaire Algebra voor ST (2DS06) op 23-3-2007, 14.30-17.00 uur.

Tijdens dit tentamen mag geen ander materiaal gebruikt worden dan kladpapier en schrijfgerei. Dus geen boeken, dictaten, aantekeningen, rekenmachines of laptops.
Aan dit tentamen gaat een MATLAB-toets van een half uur vooraf. Pas als de laptops van tafel zijn wordt dit tentamen uitgedeeld.
Succes!

Opgave 1
De volgende matrix A en vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven. De matrix A bevat een parameter k die een een willekeurig reëel getal voorstelt.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & k \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Voor welke waarde(n) van de parameter k is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ strijdig (=inconsistent)?

Vegen van het stelsel geeft:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -6 & k & -7 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 2k & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 5 \\ -2 & -6 & k & -7 \\ 0 & -4 & 2k & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & k-6 & 3 \\ 0 & -4 & 2k & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & k-6 & 3 \\ 0 & 0 & 3k-6 & 5 \end{array}\right]$$

We zien dat het stelsel een unieke oplossing heeft als $3k - 6 \neq 0$ terwijl het stelsel strijdig is als $3k - 6 = 0$, dus voor $k = 2$.

(b) Neem $k = 3$ en bepaal alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Voor $k = 3$ is er een unieke oplossing: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ en $x_3 = \frac{5}{3}$ (vul bijvoorbeeld $k = 3$ in in het gereduceerde stelsel gevonden bij (a) en los op d.m.v. achterwaartse substitutie).

Opgave 2
Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal een basis van de kolomruimte van A.

Vegen van A naar trapvorm geeft (bijvoorbeeld)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Leidende enen staan in de eerste drie kolommen, dus de eerste drie kolommen van A vormen een basis van de kolomruimte.

Anders: vegen van A^T geeft (bijvoorbeeld)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De eerste drie rijen van R vormen een basis van de rijruimte van R = rijruimte van A^T. De eerste drie rijen van R geschreven als kolom-vectoren vormen dus een basis van de kolomruimte van A.

(b) Wat is de dimensie van de nulruimte van A? Leg uit.

De rang van A is de dimensie van de kolomruimte en deze is 3 (zie (a)), dus de dimensie van de nulruimte is $n - r = 4 - 3 = 1$

(c) Is A inverteerbaar? Leg uit.

De rang is niet 4, de dimensie van de nulruimte niet nul, dus de matrix is niet inverteerbaar.

Opgave 3
De afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat L een lineaire transformatie is.

Voor alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ geldt

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ 4(u_1 + v_1) - 3(u_2 + v_2) \\ 4(u_1 + v_1) + 4(u_3 + v_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 + v_1 - v_2 \\ 4u_1 - 3u_2 + 4v_1 - 3v_2 \\ 4u_1 + 4u_3 + 4v_1 + 4v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ 4u_1 - 3u_2 \\ 4u_1 + 4u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ 4v_1 - 3v_2 \\ 4v_1 + 4v_3 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

en voor alle c in $\mathbb{R}$ en $\mathbf{u}$ in $\mathbb{R}^3$ geldt

$$L(c\mathbf{u}) = L\left(\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cu_1 - cu_2 \\ 4cu_1 - 3cu_2 \\ 4cu_1 + 4cu_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ 4u_1 - 3u_2 \\ 4u_1 + 4u_3 \end{bmatrix} = cL\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = cL(\mathbf{u})$$

(b) Geef de matrixrepresentatie A van L ten opzichte van de standaard basis S van $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Geef de matrixrepresentatie B van L ten opzichte van de onderstaande basis T van $\mathbb{R}^3$.

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

De beelden van de T-basis zijn:

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \; L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \; L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dus om de coördinaatvectoren t.o.v. de basis T van deze beelden te vinden moeten we drie stelsels vegen met dezelfde coëfficiëntenmatrix. In één keer vegen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

de kolommen van matrix B zijn de coördinaatvectoren t.o.v. de basis T van de beelden van de T-basis, dus

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -8 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(d) Geef een inverteerbare matrix P waarvoor geldt dat $B = P^{-1}AP$.

$$P = P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

De vectoren $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ spannen een driedimensionale deelruimte V op van $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal een orthonormale basis S voor V.

Gram-Schmidt geeft

$$\mathbf{v_1} = \mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{w_1}$$

$$\mathbf{v_2} = \mathbf{u_2} - \frac{(\mathbf{u_2}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{u_3} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_1})}{(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_1})}\mathbf{v_1} - \frac{(\mathbf{u_3}, \mathbf{v_2})}{(\mathbf{v_2}, \mathbf{v_2})}\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \ \mathbf{w_3} = \frac{5}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(b) Geef de coördinaatvector van $\mathbf{u_3}$ ten opzichte van de orthonormale basis S.

Om de coördinaatvector te vinden ten opzichte van een orthonormale basis is het voldoende inproducten te nemen met de basisvectoren:

$$(\mathbf{u_3}, \mathbf{w_1}) = 0, \ (\mathbf{u_3}, \mathbf{w_2}) = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \ (\mathbf{u_3}, \mathbf{w_3}) = \frac{1}{5}\sqrt{30}$$

dus

$$[\mathbf{u_3}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{30} \end{bmatrix}$$

Opgave 5

Gegeven is de volgende matrix A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal alle eigenwaarden van A.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 9 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 9 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda(\lambda - 3)^2$$

Dus de eigenwaarden zijn $0, 3, 3$.

(b) Geef bij elke eigenwaarde een eigenvector.

bij 0:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft als algemene oplossing $x_1 = r \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Een eigenvector bij eigenwaarde nul is dus bijvoorbeeld (kies $r = 1$): $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Bij 3:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dus $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ heeft als algemene oplossing $x_3 = r \in \mathbb{R}$, $x_2 = \frac{1}{3}r$, $x_1 = \frac{1}{9}r$.

Een eigenvector bij eigenwaarde 3 is dus bijvoorbeeld (kies $r = 9$): $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$

(c) Is A diagonaliseerbaar? Leg uit.

Nee, want bij eigenwaarde 3 zijn er geen twee lineair onafhankelijke eigenvectoren (eigenruimte heeft dim 1). Er zijn dus in totaal (bij alle eigenwaarden samen) ook geen drie lineair onafhankelijke eigenvectoren te vinden, dus er is geen basis van eigenvectoren, ofwel de matrix is niet diagonaliseerbaar.

Voor de onderdelen kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

1	a:	4	2	a:	4	3	a:	2	4	a:	5	5	a:	4
	b:	4		b:	2		b:	2		b:	3		b:	4
				c:	2		c:	5					c:	2
							d:	2						

Dit zijn in totaal 45 punten. Het eindcijfer voor dit vak wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten voor dit tentamen vermeerderd met de behaalde MATLAB-punten door 5 te delen.