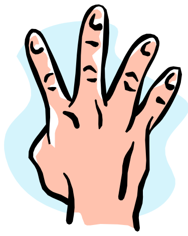
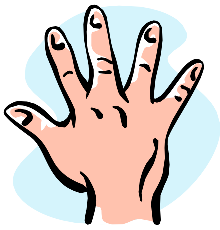
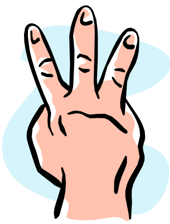
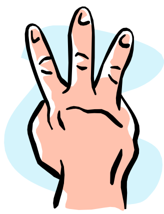
Talstelsels

Wie leert rekenen doet dat in het begin vaak met z'n vingers erbij: 1 + 4 =…
Elke vinger krijgt een "naam": één, twee,….tien. Eigenlijk is er helemaal geen sprake van rekenen, maar van tellen:

 +  =



Vanwege die tien vingers gebruiken wij tien symbolen. 0, 1,…, 8, 9.
Dat lijkt vreemd: 0 doet eigenlijk helemaal niet mee! En die tiende vinger zou best een naam mogen krijgen die uit één symbool bestond, toch?

Maar wat is dan:  -  ?

De Romeinen kenden geen symbool voor nul. Dat was gewoon een leeg vakje op hun telraam. Wel had "nul"een naam: NIHIL of: NULLUS.
Pas de invloed van de Arabische wereld (met India daarvoor) deed nul tot een getal worden: 3 – 3 = 0.
En wat is dan 10? Die 0 duidt op: geen "losse" vingers en die 1 duidt op: 1 paar volledig gebruikte handen. De symbolen zijn op, we gaan ze combineren!
Wat is dan 73? 7 paar volledig gebruikte handen en 3 "losse" vingers.
Korter: 73 = 7 ☒ 10 + 3 ☒ 1
Maar na 99 begint een volgend probleem: alle combinaties zijn (weer) op!
Nou, op: na 9 komt immers 10! Dus na 9-9 komt 10-0! Oftewel: 99, 100.
Ja, en dan kun je echt verder: wat betekent 28184?

28184 =20000 + 8000 + 100 + 80 + 4 = 2 ☒ 10000 + 8 ☒ 1000 + 1 ☒ 100 + 8 ☒ 10 + 4 ☒ 1
Of, korter: 28184 = 2 ☒ 10^4 + 8 ☒ 10^3 + 1 ☒ 10^2 + 8 ☒ 10^1 + 4 ☒ 10^0
We zeggen, dat 28184 een getal is in het tientallig getallenstelsel.

Opdracht 1

Noteer op dezelfde manier als dit voorbeeld ook: 153712 en 13062.

Sommige culturen gebruik(t)en het twintigtallig stelsel: wellicht rekenden die ook met hun tenen(?) Je kunt de resten hiervan onder andere zien in Frankrijk: 80 = quatre vingt = 4 ⊠ 20 en 90 = quatre vingt dix = 4 ⊠ 20 + 10 (In het Franssprekende deel van Zwitserland spreekt men van octante = 80 en nonante = 90, dus geen 20-tallig stelsel!)
Maar stel nu eens, dat de mens maar drie vingers aan elke hand had gehad, of zes!
Dan hadden we geteld: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 (zestallig) of: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Θ, ■, 10 (twaalftallig, ik verzin voor de tiende en de elfde vinger maar even een symbool.)

> Je hoeft niet eens twaalf vingers te hebben om toch een twaalftallig stelsel te gebruiken. In het oude Mesopotamië gebruikte men 12 en 60 als grondtal. Waar zie je bij ons nog restanten van het 12- en 60-tallig stelsel? Kun je bedenken waar die 12 vandaan zou kunnen komen?

En dan bestaat in het zestallig stelsel 17 niet eens, want het symbool 7 bestaat daarin niet, net zo als wij geen apart symbool (hier ■) voor elf hebben, omdat we niet twaalftallig rekenen.
En, nog ingewikkelder, een getal als 43 betekent in het 6-tallig stelsel heel wat anders dan 43 in het (ons!) 10-tallig stelsel.
Want: 43 (6-tallig) = 4 paar volle handen (met elk 3 vingers) en 3 losse vingers = 4 ⊠ 6 (dit is een 10-tallige 6!) + 3 = 27(10-tallig)

Opdracht 2

a. Reken 55 (6-tallig) om naar het 10-tallig stelsel. Ook: 13 (6-tallig) en 105 (6-tallig).
b. Reken 19 (10-tallig) en 58 (10-tallig) om naar het 6-tallig stelsel.

Het binaire stelsel

Nu behandelen we het tweetallige, of binaire stelsel.

Hierin bestaan alleen de symbolen 0 en 1.
Onze eerste 11 getallen (0 tot en met 10) worden binair:

tientallig	binair
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

De rekenregels zijn verbluffend simpel:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

⊠	0	1
0	0	0
1	0	1

Vergelijk dat maar eens met wat je op de basisschool moest leren: tien tafels van vermenigvuldiging, etc.

Opdracht 3

a. Tel op: 101101 + 10110 (Aanwijzing: gewoon onder elkaar!)
b. Idem: 110111001 + 110010110
c. Vermenigvuldig: 1101 $\boxtimes$ 101 ; net zoals je op de basisschool 472 $\boxtimes$ 384 uitrekende:

$$
\begin{array}{cccccc c}
 & & & 4 & 7 & 2 & \\
 & & & 3 & 8 & 4 & \times \\
\hline
 & & 1 & 8 & 8 & 8 & \\
 & 3 & 7 & 7 & 6 & & \\
1 & 4 & 1 & 6 & & & + \\
\hline
1 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 &
\end{array}
$$

d. Idem: 101101 $\boxtimes$ 11011

Nu gaan we omrekenen: Eerst van binair naar 10-tallig:

Een voorbeeld:

$$
\begin{aligned}
1101101 &= 1000000 + 100000 + 1000 + 100 + 1 = \\
&\quad 1 \times 2^6 + 1 \boxtimes 2^5 + 1 \boxtimes 2^3 + 1 \boxtimes 2^2 + 1 \boxtimes 2^0 = \\
&\quad 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109
\end{aligned}
$$

Het is handig om de volgende schrijfwijze (notatie) te gaan gebruiken:
101_{10} betekent 101 (10-tallig) en 101_2 betekent 101(2-tallig).

Dus $101_{10} = 1 \times 10^2 + 1 = 101$ (10-tallig) en $101_2 = 1 \times 2^2 + 1 = 5$ (10-tallig)

Je ziet: $1_2 = 1_{10}$, $10_2 = 2_{10}$, $100_2 = 4_{10}$, $1000_2 = 8_{10}$, $10000_2 = 16_{10}$, $100000_2 = 32_{10}$,
Enzovoort.

Opdracht 4
Zet de getallen uit opdracht 3 om in het 10-tallig stelsel en controleer de juistheid van de antwoorden.

Hopelijk is de vorige opdracht gelukt, en heb je ook ontdekt dat of je nu zegt 4 + 5 = 9 of 100 + 101 = 1001, het is allebei juist. Alleen, de getalstelsels verschillen.

Nu omrekenen van 10-tallig naar binair:

Hierbij gebruik ik een “eigen” methode (niet zelf-ontworpen: hij is oeroud!)

Voorbeeld:

		rest
	87	
2	43	1
2	21	1
2	10	1
2	5	0
2	2	1
2	1 →	0

$87_{10} = 1010111_2$

Lees: 87 : 2 = 43, rest is 1; 43 : 2 = 21, rest is 1; 21 : 2 = 10, rest is 1; 10 : 2 = 5, rest is 0; enzovoorts.
De oplossing lees je van onder naar boven. (volg de pijlen)

Opdracht 5

Zet om van 10-tallig naar binair: (gebruik eventueel ook je rekenmachine)

a. 147
b. 2789
c. 488

Het hexadecimale (16-tallige) stelsel

Alle symbolen, waarvan men rond 1950 vond dat ze een tweetallige code moesten krijgen, vormen de zogenaamde ASCII-codetabel. 127 Tekens (dat werd later uitgebreid naar 255 tekens) werden aan een bepaald getal gekoppeld.
En al die ASCII-getallen worden dan ook nog eens tweetallig genoteerd.
Op http://nl.wikipedia.org/wiki/ASCII_(tekenset)#Tabel_van_ASCII-codes staat een mooie ASCII-tabel.

Tweetallig geschreven "taal" ziet er heel eentonig en onleesbaar uit:
de woorden "Tweetallig Stelsel" worden (de spaties geven de grenzen van elk symbool aan en horen er niet in thuis, maar dat leest iets makkelijker):
01010100 01110111 01100101 01100101 01110100 01100001 01101100 01101100 01101001 01100111 00100000 01010011 01110100 01100101 01101100 01110011 01100101 01101100 (00100000 hierin is de spatie tussen de twee woorden, ASCII-code 32)
Merk op dat ik alle codes heb aangevuld tot een 8-cijferig geheel. "By eight" noemde men dat vroeger, tegenwoordig kortweg: byte.
(En dan maar hopen dat ik geen tikfout heb gemaakt, anders vertaalt de PC zoiets rustig in &tw @ÞŒ¾¶ dh©llÈ!!)

Onder andere daarom hebben mensen het 16-tallig stelsel ontworpen. 16-Tallig, omdat je dan precies 4 tweetallige symbolen kunt vertalen naar één 16-tallig symbool volgens de tabel hieronder:

Binair (tweetallig)	Hexadecimaal (zestientallig)	Decimaal (tientallig)
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	A	10
1011	B	11
1100	C	12
1101	D	13
1110	E	14
1111	F	15

Dan wordt die onmogelijke code van zoëven:
54 77 65 65 74 61 6C 6C 69 67 20 73 74 65 6C 73 65 6C (na twee tekens een spatie is gebruikelijk)
Nog niet bepaald “leesbaar” maar wel minder lang en minder eentonig!

Opdracht 6

De ASCII-codes van de letters van het alfabet zijn: A = 64 + 1 = 65, B = 64 + 2 = 66, ………, Z = 64 + 26 = 90; allemaal 10-tallig. (omdat we elke letter door een byte vervangen wordt de letter A niet geschreven als 1000001, want dat zijn 7 bits, maar als 01000001, 8 bits)
De letters a tm z krijgen ASCII-code 64 + 32 + 1 = 97 tot en met 64 + 32 + 26 = 122
Met de combinatie ALT - numeriek toetsenbord kun je dit zichtbaar maken: ALT 80 geeft P, ALT 130 geeft é, enzovoorts. (codes boven 127 horen strikt genomen niet tot de ASCII-code, je vindt dan ook geen eenstemmigheid bij alle PC-fabrikanten)
Zet de volgende woorden eerst om in een decimale ASCII-code, daarna binair, tenslotte hexadecimaal:
a. BINAIR
b. Typewriter

Opdracht 7
Probeer de getallen 100, 255 en 17889, allen 10-tallig, om te zetten naar de hexadecimale schrijfwijze op de manier van opdracht 5. Bedenk dat je dan steeds door 16 moet delen en de resten noteren.
(Eerst naar binair omzetten kan natuurlijk ook)

Opdracht 8
Ga na, hoe kleine en grote letters binnen de binaire ASCII-code in elkaar zijn om te zetten. (dus tweetallig rekenen!)

In HTML (en XHTML en CSS) kun je kleuren op een compacte manier aangeven in hexadecimale notatie. De drie relatieve aandelen van rood, groen en blauw in de kleur geef je met drie bytes (0..255) aan. Zo'n byte noteer je met twee hexamdecimale cijfers, in totaal 6 cijfers achter elkaar. Voorbeelden: *ff0000* is rood, *00ff00* is groen, *0000ff* is blauw.

Opdracht 9

Om in HTML de tekst "Rood" rood te krijgen, kun je schrijven:
```
<font color="0000ff">Rood</font>
```
Maak een HTML-file met een aantal stukken tekst in verschillende kleuren, gebruik makend van hexadecimale kleurcodes. Hoe maak je wit en zwart? En geel, roze, paars?

Aanhangsel

Van de omzettingsmethode van decimaal naar binair heb ik niet aangetoond waaròm die werkt. Ik zal proberen dat aan de hand van een voorbeeld uit te leggen.
Ik maak van 87 een binair getal.

Bedenk, dat 87 oneven is. Als je 87 door 2 deelt krijg je
87 : 2 = 43, rest 1; oftewel: 87 = 43 ⊠ 2 + 1 Die 1 is belangrijk, het is de achterste1 van 1010111.
Daarna bereken je 43 : 2 Ook dat lukt niet: 43 : 2 = 21, rest 1
Feitelijk heb je nu: 87 = 21 ⊠ 4 + 1 ⊠ 2 + 1 ! Daarna kijk je of er een “losse” 4 in 21 ⊠ 4 zit.
Die is er: 21 = 10 ⊠ 2 + 1, dus 87 = 10 ⊠ 8 + 1 ⊠ 4 + 1 ⊠ 2 + 1
Dan 10 : 2 = 5, rest 0, dus geen losse 8 (van 10 x 8 heb je feitelijk 5 x 16 gemaakt)
Je krijgt: 87 = 5 ⊠ 16 + 0 x 8 + 1 ⊠ 4 + 1 ⊠ 2 + 1
Daarna 87 = 2 ⊠ 32 + 1 ⊠ 16 + 0 x 8 + 1 ⊠ 4 + 1 ⊠ 2 + 1
Zo ga je door. Uiteindelijk deel je 6 keer door 2. Je laatste antwoord is 1. Dat is 1 ⊠ 2^6 = 64
Zodoende wordt 87 gelijk aan:
64 + 16 + 4 + 2 + 1 = 1 ⊠ 2^6 + 0 ⊠ 2^5 + 1 ⊠ 2^4 + 0 ⊠ 2^3 + 1 ⊠ 2^2 + 1 ⊠ 2^1 + 1 ⊠ 2^0 = 1010111_2

Helemaal uitgeschreven voor een kleiner getal, 45:

<table>
<tr><td>45</td><td>=</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>2 +</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td colspan="2">4 +</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="2">4 +</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="8">16 +</td><td colspan="8">16 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="2">4 +</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="16">32 +</td><td colspan="4">8 +</td><td colspan="2">4 +</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="16">1 ⊠ 2^5 0 ⊠ 2^4</td><td colspan="4">1 ⊠ 2^3</td><td colspan="2">1 ⊠ 2^2</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="16">1 0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="2">1 0</td><td>1</td></tr>
</table>

= 101101_2