TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 13 april 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.30d

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

(15) 1. Complexe getallen

a. Los op: $z^4 = 1$.

Oplossing: $z = \pm 1, \pm i$.

b. Los op: $e^{iz} = \sqrt{3} + i$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. (Hint: Schrijf eerst het rechterlid als een complexe e-macht.)

Oplossing: $z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi - i \ln 2$ met $k \in \mathbb{Z}$ willekeurig.

c. Bewijs: $\sin(3\theta) = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. Gebruik hiertoe eigenschappen van e^z, $z \in \mathbb{C}$.

Oplossing: $\sin(3\theta) = \operatorname{Im} e^{3i\theta} = \operatorname{Im}(e^{i\theta})^3 = \operatorname{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$.

♣

(20) 2. Differentiëren

a. Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $\tan x > x$ voor alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ en $\tan x < x$ voor alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Kies $f(x) = \tan x$, zodat $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 1$ voor alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ met uitzondering van $x = 0$. Volgens de middelwaardestelling is er een c tussen 0 en x (i.h.b. dus $c \neq 0$), zodanig dat $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) > 1$, m.a.w. $\dfrac{\tan x}{x} > 1$. Door met x te vermenigvuldigen volgt het resultaat. Onderscheid hierbij de gevallen $x > 0$ en $x < 0$.

b. Geef het derde orde Taylorpolynoom $p_3(x)$ van $f(x) = \ln x - \cos(x-1) - x + 2$ rond $x = 1$.

We hebben achtereenvolgens $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \sin(x-1) - 1$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \cos(x-1)$, $f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \sin(x-1)$, zodat $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = 2$, dus $p_3(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)^3$.

♣

(25) 3. Primitiveren en integreren

a. Primitiveer: $\displaystyle\int 2^x\,dx$

$\displaystyle\int 2^x\,dx = \int e^{x\ln 2}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,e^{x\ln 2} + c$, met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig.

b. Primitiveer: $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx$ (Hint: Tweemaal partieel integreren)

Tweemaal partieel integreren: $I \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int e^x \cos x\,dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \stackrel{\text{def}}{=}$ $e^x \cos x + e^x \sin x - I$. Hieruit volgt: $I = \dfrac{1}{2}\,e^x(\cos x + \sin x) + c$, met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Alternatief: Poneer een oplossing van het type $I = e^x(a\cos x + b\sin x) + c$ en bepaal $a, b \in \mathbb{R}$ middels differentiatie.

c. Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x+1}\,dx$

Een staartdeling levert $(x^5+1)/(x+1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, zodat $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x+1}\,dx = \int x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\,dx =$ $\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + c$.

d. Integreer: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\cos x\,dx$.

Substitueer $y = \sin x$, zodat $dy = \cos x\,dx$. Dit levert $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\cos x\,dx = \int_0^1 y^4\,dy = \frac{1}{5}$.

e. Integreer: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. (Hint: Substitueer $y = x + \sqrt{1+x^2}$.)

Met $y = x + \sqrt{1+x^2}$, dus $dy = \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, krijgen we $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$ $\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dy}{y} = \ln|y|\,\Big|_1^{1+\sqrt{2}} = \ln(1+\sqrt{2})$.

♣

(40) 4. Differentiaalvergelijkingen

a. Laat zien dat de volgende differentiaalvergelijking, geldig voor $x > 0$, twee onafhankelijke oplossingen heeft van het type $y(x) = x^\lambda$, en bepaal de bijbehorende waarden van λ:

$$4\,x^2\,y'' - 4\,x\,y' + 3\,y = 0\,.$$

Substitutie van $y(x) = x^\lambda$ in de differentiaalvergelijking levert $(4\lambda^2 - 8\lambda + 3)x^\lambda = 0$. Dit moet gelden voor alle $x > 0$, dus $4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$. Oplossing: $\lambda = \frac{1}{2}$ of $\lambda = \frac{3}{2}$, dus $y(x) = \sqrt{x}$ en $y(x) = x\sqrt{x}$ zijn twee onafhankelijke oplossingen.

b. Los op: $y'' + 9\,y = 27$.

De corresponderende homogene differentiaalvergelijking is $y'' + 9\,y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 9 = 0$, waaruit volgt $\lambda_\pm = \pm 3i$. De (reëelwaardige) oplossing van het homogene probleem is dus $y_0(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$, met $A, B \in \mathbb{R}$ willekeurig. Een particuliere oplossing is $y_\mathrm{p}(x) = 3$. Dus $y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x) + 3$.

c. Laat zien dat $y(x) = c\,e^{\int_0^x f(s)\,ds}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$ een oplossing is van $y' = f(x)\,y$. Hierin wordt verondersteld dat f een gegeven continue functie met domein $\mathbb{R}$ is.

Toepassing van de kettingregel levert $y'(t) = c\,e^{\int_0^t f(s)\,ds}\, f(t) = f(t)\,y(t)$. Een omslachtigere manier is het oplossen van de differentiaalvergelijking door separatie van variabelen.

d. Los op: $\begin{cases} y' + x\,y &= e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

Een primitieve van $p(x) = x$ is $P(x) = \frac{1}{2}x^2$. Vermenigvuldig de differentiaalvergelijking links en rechts met $e^{P(x)}$, dit levert $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{2}x^2}\,y\right) = \cos x$, oftewel $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\,(\sin x + c)$ voor een of andere $c \in \mathbb{R}$. De extra conditie levert $y(0) = c = 1$, zodat $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\,(\sin x + 1)$.

♣

($\star$) STEROPGAVE

Los op: $\begin{cases} y' + y + e^{-x}\int_0^x e^t\,y(t)\,dt &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

(Hint: Leid hieruit een tweede orde differentiaalvergelijking af door nogmaals te differentiëren.)

De differentiaalvergelijking nogmaals differentiëren levert $y'' + 2y' + 2y = 0$. (Dit is het eenvoudigst in te zien door de vergelijking eerst met e^x te vermenigvuldigen en dan pas te differentiëren, maar ook door bovenstaande vergelijking te combineren met de gedifferentieerde vergelijking teneinde de integraalterm te elimineren.) Via de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, met oplossingen $\lambda_\pm = -1 \pm i$, vinden we de algemene oplossing van de resulterende *tweede orde* differentiaalvergelijking, namelijk

$$y(x) = A\,e^{-(1-i)x} + B\,e^{-(1+i)x}\,,$$

met $A, B \in \mathbb{R}$ willekeurige integratieconstanten. Echter, de oorspronkelijke differentiaalvergelijking is een *eerste orde* differentiaalvergelijking en dus verwacht je dat de oplossing slechts *één* integratieconstante toelaat. Substitutie van de gevonden oplossing in het linkerlid van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking levert

$$y'(x) + y(x) + e^{-x}\int_0^x e^t\,y(t)\,dt = i\,e^{-x}\,(A - B)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dus moet gelden $A = B$. Conclusie:

$$y(x) = A\,e^{-(1-i)x} + A\,e^{-(1+i)x} = C\,e^{-x}\,\cos x\,,$$

met $C = 2A \in \mathbb{R}$ willekeurig. (De laatste stap is een notationele vereenvoudiging gebruik makend van $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$.) De beginvoorwaarde levert tenslotte $C = y(0) = 1$, dus

$$y(x) = A\,e^{-(1-i)x} + A\,e^{-(1+i)x} = e^{-x}\,\cos x\,.$$

THE END