HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 18 april 2012. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: n.n.b.

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

. . . .

Definities

$$\cosh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x$$

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 \quad \text{met} \quad 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$\operatorname{erf}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

. . . .

(10) 1. Volledige inductie

Bewijs voor $x \neq 0$ en geheeltallige $n \geq 1$ dat $\dfrac{d^n}{dx^n} \ln|x| = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Het geval $n=1$ is triviaal. Verder geldt

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln|x| = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n} \ln|x|\right) \stackrel{*}{=} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} .$$

Bij $*$ is de inductiehypothese gebruikt.

*

(30) 2. Differentiëren & Taylorontwikkeling

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling

$$\ln|x| = x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \mathcal{O}((x-1)^{n+1}) \quad \text{rond } x=1.$$

Voor het gemak schrijven we $f(x) = \ln|x|$. Volgens opgave 1 geldt $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ voor geheeltallige $k \geq 1$, zodat ontwikkeling rond $x = 1$ leidt tot

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1)(x-1)^k + \mathcal{O}((x-1)^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k + \mathcal{O}((x-1)^{n+1}) ,$$

oftewel

$$\ln|x| = x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \mathcal{O}((x-1)^{n+1})\,.$$

(10) **b.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = \cosh(\ln|x|)$ op twee manieren:

- via de kettingregel, gebruik makend van het feit dat sinh en cosh elkaars afgeleide zijn;
- door de functie cosh eerst uit te drukken in e-machten alvorens te differentiëren.

Eerste methode:

$$f'(x) = \cosh'(\ln|x|)\,\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{\sinh(\ln|x|)}{x} \quad (x \neq 0)\,.$$

Tweede methode:

$$f(x) = \frac{e^{\ln|x|} + e^{-\ln|x|}}{2} = \frac{|x| + |x|^{-1}}{2} = \frac{x^2+1}{2|x|}\,,$$

oftewel

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(x + x^{-1}\right) & (x < 0) \\ \frac{1}{2}\left(x + x^{-1}\right) & (x > 0) \end{cases}$$

Hieruit leid je af dat

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 - x^{-2}\right) & (x < 0) \\ \frac{1}{2}\left(1 - x^{-2}\right) & (x > 0) \end{cases}$$

Door de functie sinh uit te drukken in e-machten kun je laten zien dat beide resultaten overeen komen.

(10) **c.** Bepaal de afgeleide f' van de functie f met functievoorschrift $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de analyse en de definitie van de functie erf vind je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\,dt \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^{x} e^{-\frac{1}{2}s^2}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,.$$

Bij $*$ is de substitutie $s = t\sqrt{2}$ doorgevoerd.

*

(30) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

(10) **a.** Primitiveer: $\int e^x \sin x\, dx$.

HINT: Tweemaal partieel integreren.

Partieel integreren:

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \right).$$

Hieruit los je op:

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c\,.$$

waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante is.

(10) **b.** Bepaal de volgende integraal in termen van de erf-functie: $\int_a^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{\sigma^2}\right) dt$.

Hierin zijn $a \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ reële parameters.

Substitutie (bij $*$) van variabelen $y = \frac{t-a}{\sigma}$ levert

$$\int_a^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{\sigma^2}\right) dt \overset{*}{=} \sigma \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} \exp\left(-y^2\right) dy = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} \exp\left(-y^2\right) dy \right) = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

(10) **c.** Bepaal de oppervlakte ingesloten door de parabolen $p\colon y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ en $q\colon y = \frac{1}{2}x^2$.

Noem de oppervlakte A. De parabolen snijden elkaar in de punten $(x, y) = (\pm 1, \frac{1}{2})$. Op het relevante interval $(-1, 1)$ ligt p boven q, dus $A = \int_{-1}^{1} (p(x) - q(x))\, dx = -\frac{1}{3}x^3 + x \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$.

*

(15) **4.** INTEGRAALVERGELIJKINGEN

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) + \int_0^x y^2(t)\, t\, dt \; = \; p$.

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voor elke reële constante $p \in \mathbb{R}$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + y^2\, x = 0$.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de analyse (bij $*$) vind je

$$\frac{d}{dx}\left(y(x) + \int_0^x y^2(t)\, t\, dt - p \right) \overset{*}{=} y'(x) + y^2(x)\, x = 0\,.$$

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.

Dit is een homogene, niet-lineaire, separabele differentiaalvergelijking, die je kunt herschrijven als

$$\frac{dy}{y^2} = -x\, dx\,.$$

Integreren levert $-\frac{1}{y} + c = -\frac{1}{2}x^2$ voor willekeurige $c \in \mathbb{R}$, oftewel $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^2 + c}$.

(5) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de parameter p mag aannemen.

De integraalvergelijking legt de beginvoorwaarde vast: kennelijk is $y(0) = p$. Uit voorgaand onderdeel volgt dan $\frac{1}{c} = p$, oftewel $c = \frac{1}{p}$, dus

$$y(x) = \frac{p}{\frac{1}{2}p\,x^2 + 1}\,.$$

Dit geldt voor alle $p \neq 0$. Het geval $p = 0$ moet apart gecontroleerd worden, maar dat de oplossing ($y(x) = 0$) ook hiervoor geldt zie je direct aan de integraalvergelijking.

*

(15) 5. Differentiaalvergelijkingen

We bekijken het volgende homogene beginwaardenprobleem voor $y(x)$:

$$\begin{cases} y'' + 2xy' &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Los de vergelijking $u' + 2xu = 0$ op onder de beginvoorwaarde $u(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Middels de methode van separatie vind je, de beginvoorwaarde negerend, $u(x) = k\exp(-x^2)$, met $k \in \mathbb{R}$ willekeurig. Leg je de beginvoorwaarde op dan vind je voor de integratieconstante de waarde $k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

($7\frac{1}{2}$) **b.** Los nu het beginwaardenprobleem voor $y(x)$ op.

Merk op dat $y' = u$ met beginvoorwaarde $y(0) = 1$. Primitiveren van de bij onderdeel a gevonden oplossing geeft dus, zonder de beginvoorwaarde op te leggen, $y(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\,dt + c = \operatorname{erf}(x) + c$, met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig. De beginvoorwaarde levert $c = 1$.

***