HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 18 april 2012. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: n.n.b.

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

....

Definities

$$\cosh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x$$

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{met} \quad 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

$$\operatorname{erf}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

....

(10) **1.** Volledige inductie

Bewijs voor $x \neq 0$ en geheeltallige $n \geq 1$ dat $\dfrac{d^n}{dx^n} \ln|x| = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

*

(30) **2.** Differentiëren & Taylorontwikkeling

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling

$$\ln|x| = x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \mathcal{O}((x-1)^{n+1}) \quad \text{rond } x=1.$$

(10) **b.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = \cosh(\ln|x|)$ op twee manieren:

- via de kettingregel, gebruik makend van het feit dat sinh en cosh elkaars afgeleide zijn;
- door de functie cosh eerst uit te drukken in e-machten alvorens te differentiëren.

(10) **c.** Bepaal de afgeleide f' van de functie f met functievoorschrift $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

*

(30) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

(10) **a.** Primitiveer: $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$.

HINT: Tweemaal partieel integreren.

(10) **b.** Bepaal de volgende integraal in termen van de erf-functie: $\displaystyle\int_a^x \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{\sigma^2}\right) dt.$

Hierin zijn $a \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ reële parameters.

(10) **c.** Bepaal de oppervlakte ingesloten door de parabolen $p\colon y = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ en $q\colon y = \frac{1}{2}x^2$.

*

(15) **4.** INTEGRAALVERGELIJKINGEN

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $\displaystyle y(x) + \int_0^x y^2(t)\, t\, dt \;=\; p.$

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voor elke reële constante $p \in \mathbb{R}$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + y^2\, x = 0$.

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.

(5) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de parameter p mag aannemen.

*

(15) **5.** DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

We bekijken het volgende homogene beginwaardenprobleem voor $y(x)$:

$$\begin{cases} y'' + 2xy' &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Los de vergelijking $u' + 2xu = 0$ op onder de beginvoorwaarde $u(0) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

($7\frac{1}{2}$) **b.** Los nu het beginwaardenprobleem voor $y(x)$ op.

***