TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 19 januari 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.01ab

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

In onderstaande vragen mag je gebruik maken van de volgende formules.

Standaardlimiet: $\lim_{x\to\infty} x^k\, e^{-x} = 0$ voor elke positieve, geheeltallige k.

Cosinus en sinus hyperbolicus: $\cosh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $\sinh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(**15**) **1.** Complexe getallen

a. Laat zien dat $z = 1 - i$ een oplossing is van de vergelijking $z^3 - 9z^2 + 16z - 14 = 0$ en bepaal alle overige oplossingen.

Oplossing: $z = 1-i, 1+i, z = 7$. Dit volgt door $z^3 - 9z^2 + 16z - 14$ te delen door $(z-(1-i))(z-(1+i)) = z^2 - 2z + 2$ via een staartdeling.

b. Los op: $e^z = 1 + i$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

Oplossing: $z = \frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{1}{4}\pi + k\,2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ willekeurig.

c. Bewijs: $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. Gebruik hiertoe eigenschappen van e^z, $z \in \mathbb{C}$.

Oplossing: $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\, e^{3i\theta} = \mathrm{Re}\,(e^{i\theta})^3 = \mathrm{Re}\,(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

♣

(**20**) **2.** Differentiëren

a. Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $\sin x < x$ voor alle $x > 0$ met $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Kies $f(x) = \sin x$, zodat $f'(x) = \cos x < 1$ voor alle $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Volgens de middelwaardestelling is er een $c > 0$, $0 < c < x < \frac{\pi}{2}$, zodanig dat $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = \cos c < 1$, m.a.w. $\frac{\sin x}{x} < 1$. Door met x te vermenigvuldigen volgt het resultaat.

b. Geef het derde orde Taylorpolynoom $p_3(x)$ van $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ rond $x = 0$.

We hebben achtereenvolgens $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x) = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$, $f'''(x) = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$, zodat $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, dus $p_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3$.

♣

(25) 3. Primitiveren en integreren

a. Primitiveer: $\int \ln|x|\,dx$

Partieel integreren: $\int \ln|x|\,dx = x\,\ln|x| - \int\,dx = x\,\ln|x| - x + c$.

b. Primitiveer: $\int \cosh x\,\cos x\,dx$ (Hint: Meervoudig partieel integreren)

Tweemaal partieel integreren: $I \stackrel{\text{def}}{=} \int \cosh x\,\cos x\,dx = \cosh x\,\sin x - \int \sinh x\,\sin x\,dx = \cosh x\,\sin x + \sinh x\,\cos x - \int \cosh x\,\cos x\,dx = \cosh x\,\sin x + \sinh x\,\cos x - I$. Hieruit volgt: $I = \frac{1}{2}\,(\cosh x\,\sin x + \sinh x\,\cos x) + c$.

c. Primitiveer: $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\,dx$

Partieel integreren en substitutie van variabelen: $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\,dx = x\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}}\Big|_{y\,=\,x^2+1} = x\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + c$.

d. Integreer: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx$.

Substitueer $y = \sin x$, zodat $dy = \cos x\,dx$. Dit levert $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$.

Partieel integreren werkt ook: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx = \sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx$, waaruit de gevraagde integraal valt op te lossen (de stokterm is 1).

Tenslotte, ook de goniometrische identiteit $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$ biedt uitkomst: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\cos(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

e. Bewijs voor $\lambda > 0$ en geheeltallige $n \geq 0$: $\int_0^\infty x^n\,e^{-\lambda x}\,dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Schrijf gemakshalve $I_n(\lambda) = \int_0^\infty x^n\, e^{-\lambda x}\, dx$. Volledige inductie:

- Inductiestap: $I_0(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} - 1\right) = \frac{1}{\lambda}$, in overeenstemming met de stelling.
- Gebruik makend van de inductiehypothese voor gegeven n en partieel integreren: $I_{n+1}(\lambda) = \int_0^\infty x^{n+1}\, e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda}\, x^{n+1}\, e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{(n+1)}{\lambda}\int_0^\infty x^n\, e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to\infty} x^{n+1}\, e^{-\lambda x}\right) + \frac{(n+1)}{\lambda}\, I_n = \frac{(n+1)!}{\lambda^{n+2}}$, waarbij in de laatste stap de inductiehypothese is gebruikt.

♣

(40) 4. Differentiaalvergelijkingen

a. Los op (y′ betekent dy/dx): $\begin{cases} y' &= (1-y)\, y \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{cases}$ (Hint: Breuksplitsing: $\frac{1}{(1-y)\, y} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{y}$)

Separatie van variabelen:

$$\frac{dy}{(1-y)\, y} = dx\,.$$

Stel

$$\frac{1}{(1-y)\, y} = \frac{A}{1-y} + \frac{B}{y}\,,$$

dan volgt door het rechterlid weer tot één breuk te herleiden dat $A = B = 1$, zodat

$$\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{y}\right) dy = dx\,.$$

Primitiveren levert

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c$$

voor willekeurige $c \in \mathbb{R}$. Exponentiëren geeft

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = k\, e^x$$

voor willekeurige $k > 0$ (namelijk $k = e^c$), oftewel

$$\frac{y}{1-y} = K\, e^x$$

voor willekeurige $K \neq 0$ (namelijk $K = \pm k$). Deze vergelijking kunnen we oplossen naar y als functie van x:

$$y(x) = \frac{K\, e^x}{1 + K\, e^x}\,.$$

Het valt onmiddellijk in te zien dat dit ook een oplossing is als $K = 0$ (namelijk de nuloplossing) en zelfs als we de limiet $K \to \infty$ nemen (namelijk de constante oplossing $y(x) = 1$). De beginvoorwaarde $y(0) = \frac{1}{2}$ impliceert

$$\frac{1}{2} = \frac{K}{1+K}\,,$$

waaruit volgt $K = 1$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus $y(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

b. Los op: $y'' + \sqrt{2}\, y' + y = \sqrt{2}\cos x$. Ga hierbij als volgt te werk:

b1. Los de bijbehorende homogene vergelijking $y'' + \sqrt{2}\, y' + y = 0$ op.

Poneer een (mogelijk complexwaardige) oplossing van het type $y(x) = e^{\lambda x}$. Substitutie van de geponeerde oplossing geeft de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + \sqrt{2}\,\lambda + 1 = 0$. Deze vergelijking heeft twee complex geconjugeerde oplossingen: $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 \pm i)$. Daarbij horen de geponeerde complexe oplossingen $y_\pm(x) = e^{\lambda_\pm\, x} = e^{(-\frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i)\, x} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x}\, e^{\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x}$. De algemene oplossing $y_0(x)$ van de homogene vergelijking is een lineaire superpositie van deze twee onafhankelijke oplossingen: $y_0(x) = A\, y_+(x) + B\, y_-(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x} \left(A\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x} + B\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x} \right)$.

b2. Zoek een particuliere oplossing $y_\mathrm{p}(x)$ die aan de inhomogene vergelijking voldoet.

Een voor de hand liggende particulier oplossing is $y_\mathrm{p}(x) = \sin x$, aangezien $y_\mathrm{p}''(x) + y_\mathrm{p}(x) = 0$ en $y_\mathrm{p}'(x) = \cos x$.

b3. Bepaal de algemene *complexwaardige* oplossing van de inhomogene vergelijking.

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is $y(x) = y_0(x) + y_\mathrm{p}(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x} \left(A\, e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x} + B\, e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x} \right) + \sin x$. Hierin zijn $A, B \in \mathbb{C}$ willekeurige complexe constanten.

b4. Bepaal de algemene *reëelwaardige* oplossing van de inhomogene vergelijking.

Door $e^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\, ix} = \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) \pm i \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x)$ in te vullen in de oplossing bij b3 vinden we voor de algemene *complexwaardige* oplossing: $y(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x} \left(A\, (\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) + i \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x)) + B\, (\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) - i \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x)) \right) + \sin x$. Stel $A = a + \alpha\, i$ en $B = b + \beta\, i$, $a, \alpha, b, \beta \in \mathbb{R}$, dan

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x} \left((a+b)\, \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) + (-\alpha + \beta)\, \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) + (\alpha + \beta)\, i\, \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) + (a - b)\, i\, \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) \right) + \sin x\,.$$

Het reële deel hiervan is de gewenste algemene reëelwaardige oplossing: $\operatorname{Re} y(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x} \left(P\, \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) + Q\, \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x) \right) + \sin x$. Hierin zijn $P = a + b$ en $Q = -\alpha + \beta$ willekeurige reële constanten.

Eenvoudiger is het om allereerst uit de twee onafhankelijke complexwaardige oplossingen $y_\pm(x) = e^{\lambda_\pm\, x} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x}\, e^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\, i\, x}$ twee onafhankelijke reëelwaardige oplossingen te extraheren door reëel en imaginair deel te nemen: $y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x}\, \cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x)$, $y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x}\, \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\, x)$. Willekeurige reëelwaardige lineaire superpositie hiervan plus de reëelwaardige particuliere oplossing levert dan dezelfde algemene reëelwaardige oplossing als hierboven.

c. Laat zien dat $y(x) = e^{x^2} \int_a^x e^{-t^2}\, dt$ voor elke $a \in \mathbb{R}$ een oplossing is van $y' - 2x\, y - 1 = 0$.

Toepassing van de produktregel levert $y'(x) = 2x\, e^{x^2} \int_a^x e^{-t^2}\, dt + e^{x^2}\, e^{-x^2} = 2x\, y + 1$.

d. Los op: $\begin{cases} y' - \dfrac{1+x}{x}\, y &= x\, e^x\, \cos x \quad (x > 0) \\ y(\pi) &= \pi \end{cases}$

Een primitieve van $p(x) = -\frac{1+x}{x}$ is $P(x) = -\ln x - x$. Vermenigvuldig de differentiaalvergelijking links en rechts met $e^{P(x)}$, dit levert $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{-x}}{x}\, y \right) = \cos x$, oftewel $y(x) = x\, e^x\, \sin x + c\, x\, e^x$ voor een of andere $c \in \mathbb{R}$. De extra conditie $y(\pi) = c\, \pi\, e^\pi = \pi$ levert $c = e^{-\pi}$, zodat $y(x) = x\, e^x\, \sin x + x\, e^{x-\pi}$.

♣

($\star$) STEROPGAVE

Los op: $y'''' - 3\,y''' + 3\,y'' - y' = 0$. Hierin is y een $\mathbb{R}$-waardige functie van x.

Stel $w = y'$, dan $w''' - 3\,w'' + 3\,w' - w = 0$. Poneer een oplossing van het type $w_1(x) = e^{\lambda\,x}$. Dit levert de karakteristieke vergelijking $\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 1 = 0$, oftewel $(\lambda - 1)^3 = 0$, met de 3-voudig ontaarde oplossing $\lambda = 1$. Postuleer daarom een algemenere oplossing van het type $w(x) = u(x)\,w_1(x)$. Dit levert na substitutie $u''' = 0$, met als algemene oplossing $u(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Derhalve is $w(x) = (a\,x^2 + b\,x + c)\,e^x$ en dus $y(x) = \int w(x)\,dx = (A\,x^2 + B\,x + C)\,e^x + D$. Dit laatste valt in te zien door differentiëren, waaruit volgt dat $A = a, B = b - 2a, C = c - b + 2a$ en D goed gedefinieerde (en eveneens willekeurige) constanten zijn. Dit is de gezochte algemene oplossing van de gegeven 4^{de} orde differentiaalvergelijking, omdat de 4 functies $\{x \mapsto 1, x \mapsto e^x, x \mapsto x\,e^x, x \mapsto x^2\,e^x\}$ lineair onafhankelijk zijn.

THE END