TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 19 januari 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.01ab

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

In onderstaande vragen mag je gebruik maken van de volgende formules.

Standaardlimiet: $\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0$ voor elke positieve, geheeltallige k.

Cosinus en sinus hyperbolicus: $\cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $\sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

---

(15) **1.** Complexe getallen

a. Laat zien dat $z = 1 - i$ een oplossing is van de vergelijking $z^3 - 9z^2 + 16z - 14 = 0$ en bepaal alle overige oplossingen.

b. Los op: $e^z = 1 + i$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

c. Bewijs: $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. Gebruik hiertoe eigenschappen van e^z, $z \in \mathbb{C}$.

♣

(20) **2.** Differentiëren

a. Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $\sin x < x$ voor alle $x > 0$ met $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b. Geef het derde orde Taylorpolynoom $p_3(x)$ van $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ rond $x = 0$.

♣

z.o.z.

(25) 3. PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

a. Primitiveer: $\int \ln|x|\,dx$

b. Primitiveer: $\int \cosh x\,\cos x\,dx$ (Hint: Meervoudig partieel integreren)

c. Primitiveer: $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,dx$

d. Integreer: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\cos x\,dx.$

e. Bewijs voor $\lambda > 0$ en geheeltallige $n \geq 0$: $\int_0^{\infty} x^n\,e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

♣

(40) 4. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

a. Los op (y′ betekent dy/dx): $\left\{\begin{array}{rcc} y' & = & (1-y)\,y \\ y(0) & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$ (Hint: Breuksplitsing: $\dfrac{1}{(1-y)\,y} = \dfrac{A}{1-y} + \dfrac{B}{y}$)

b. Los op: $y'' + \sqrt{2}\,y' + y = \sqrt{2}\,\cos x$. Ga hierbij als volgt te werk:

b1. Los de bijbehorende homogene vergelijking $y'' + \sqrt{2}\,y' + y = 0$ op.

b2. Zoek een particuliere oplossing $y_{\mathrm{p}}(x)$ die aan de inhomogene vergelijking voldoet.

b3. Bepaal de algemene *complexwaardige* oplossing van de inhomogene vergelijking.

b4. Bepaal de algemene *reëelwaardige* oplossing van de inhomogene vergelijking.

c. Laat zien dat $y(x) = e^{x^2} \int_a^x e^{-t^2}\,dt$ voor elke $a \in \mathbb{R}$ een oplossing is van $y' - 2x\,y - 1 = 0$.

d. Los op: $\left\{\begin{array}{rcc} y' - \dfrac{1+x}{x}\,y & = & x\,e^x\,\cos x \quad (x>0) \\ y(\pi) & = & \pi \end{array}\right.$

♣

(⋆) STEROPGAVE

Los op: $y'''' - 3\,y''' + 3\,y'' - y' = 0$. Hierin is y een $\mathbb{R}$-waardige functie van x.

THE END