# TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Woensdag 25 januari 2012. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: Paviljoen u46, j17, l10

**Lees dit eerst!**

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

**Succes!**

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

DEFINITIES

$$\cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \exp x \stackrel{\text{def}}{=} e^x$$

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{with} \quad 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**(10)** **1.** VOLLEDIGE INDUCTIE

Bewijs voor $x < 1$ en geheeltallige $n \geq 0$ dat $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Het geval $n=0$ is triviaal. Verder geldt

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1-x}\right) \stackrel{*}{=} \frac{d}{dx}\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}\,.$$

Bij $*$ is de inductiehypothese gebruikt.

$*$

**(30)** **2.** DIFFERENTIËREN & TAYLORONTWIKKELING

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$ rond $x=0$.

Voor het gemak schrijven we $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Volgens opgave 1 geldt $f^{(k)}(0) = k!$ voor geheeltallige $k \geq 0$, zodat ontwikkeling rond $x = 0$ leidt tot

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)x^k + \mathcal{O}(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathcal{O}(x^{n+1})\,,$$

oftewel

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})\,.$$

(10) **b.** Geef het derde orde Taylorpolynoom van $f(x) = \cosh\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ rond $x=0$.

HINT: Schrijf $f(x) = \cosh(y(x))$ met $y(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ en merk op dat $f(y) = f(-y)$ en $y(x) = -y(-x)$.

Uit symmetrie $f(x) = f(-x)$ volgt $f'(x) = -f'(-x)$, $f''(x) = f''(-x)$, $f'''(x) = -f'''(-x)$, etc. Uit antisymmetrie $y(x) = -y(-x)$ volgt $y'(x) = y'(-x)$, $y''(x) = -y''(-x)$, etc. Gevolg: $f'(0) = f'''(0) = y(0) = y''(0) = 0$. Hiervan maken we hieronder gebruik. Noem het derde orde Taylor polynoom van $f(x)$ rond $x = 0$ kortheidshalve $p_3(x)$, dan volgt a.g.v. $f'(0) = f'''(0) = 0$:

$$p_3(x) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2\,.$$

Voor $f''(x)$ geldt o.g.v. de kettingregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sinh y(x) y'(x) = \sinh\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \\
f''(x) &= \cosh y(x)\left(y'(x)\right)^2 + \sinh y(x) y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\cosh\left(\frac{x}{1+x^2}\right)(1-x^2)^2 - 4x\sinh\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

M.b.v. $y(0) = y''(0) = 0$ volgt dan $f''(0) = y'(0)^2$. Uit

$$y'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

volgt $y'(0) = 1$ en dus $f''(0) = 1$. Al met al, tevens gebruik makend van $f(0) = 1$, vinden we

$$p_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2\,.$$

(Het derde orde Taylor polynoom is dus een tweedegraads polynoom.)

(10) **c.** Bepaal de afgeleide $f'$ van de functie $f$ met functievoorschrift $f(x) = |x|^x$ voor $x \neq 0$.

HINT: $|x| = \exp(\ln|x|)$.

Gebruik makend van kettingregel (bij $*$) en produktregel (bij $\star$) vind je

$$\frac{d}{dx}|x|^x = \frac{d}{dx}\exp(x\ln|x|) \stackrel{*}{=} \exp(x\ln|x|)\frac{d}{dx}\left(x\ln|x|\right) \stackrel{\star}{=} \exp(x\ln|x|)\left(\ln|x|+1\right) = |x|^x\left(\ln|x|+1\right)\,.$$

Bij de niet-gemarkeerde stappen is de hint toegepast.

$*$

## (30) 3. Primitiveren en integreren

(10) **a.** Primitiveer: $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

Partieel integreren:

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{2}{3}x\,(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\,(1+x)^{\frac{5}{2}} + c\,,$$

waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante is.

(10) **b.** Gegeven is de oneigenlijke integraal $I(\sigma,a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx.$

Hierin zijn $a\in\mathbb{R}$ en $\sigma>0$ reële parameters. Laat zien dat $I(\sigma,a)$ niet van $a$ en $\sigma$ afhangt.
Hint: Je mag aannemen dat $I(\sigma,a)$ bestaat, maar je hoeft zijn waarde niet uit te rekenen!

Substitutie (bij $*$) van variabelen $y = \frac{x-a}{\sigma}$ levert (merk op dat de randvoorwaarden hetzelfde blijven)

$$I(\sigma,a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)\ dx \overset{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\ dy = I(1,0)\,,$$

dus onafhankelijk van $a$ en $\sigma$.

(10) **c.** Bepaal de oppervlakte $A(\epsilon)$ ingesloten door $x$-as en de grafieken van $x=\epsilon$, $x=1$ en $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.
Hierin geldt $0<\epsilon<1$. Bestaat $A(0) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} A(\epsilon)$? Zo ja, bepaal $A(0)$.

$A(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_{\epsilon}^{1} = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$. I.h.b. is $A(0) = \lim_{\epsilon\to 0^+} A(\epsilon) = 2$.

$*$

## (15) 4. Integraalvergelijkingen

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x)\ =\ \ln p - \int_0^x e^{-y(t)}\ \sin t\,dt.$

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voor elke reële constante $p>0$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + e^{-y}\ \sin x = 0$.

Gebruik makend van de hoofdstelling van de analyse (bij $*$) vind je

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln p - \int_0^x e^{-y(t)}\ \sin t\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-y(t)}\ \sin t\,dt \overset{*}{=} -e^{-y(x)}\ \sin x\,.$$

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.

Dit is een homogene, niet-lineaire, separabele differentiaalvergelijking, die je kunt herschrijven als

$$e^y dy = -\sin x dx\,.$$

Integreren levert $e^y = \cos x + c$ voor willekeurige $c \in \mathbb{R}$, oftewel $y(x) = \ln(\cos x + c)$. (Het domein waarin deze oplossing leeft hangt af van de keuze van $c$.)

($2\frac{1}{2}$) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking.

De integraalvergelijking legt de beginvoorwaarde vast: kennelijk is $y(0) = \ln p$. Uit voorgaand onderdeel volgt dan $\ln(1 + c) = \ln p$, oftewel $c = p - 1$, dus

$$y(x) = \ln(\cos x + p - 1)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d.** Hoe moet je $p \in \mathbb{R}$ kiezen opdat de oplossing voor alle $x \in \mathbb{R}$ bestaat?

Het argument van ln moet dan strict positief zijn, dus $p > 1 - \cos x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dus $p > \max_{x\in\mathbb{R}}(1 - \cos x) = 2$.

*

## (15) 5. Differentiaalvergelijkingen

We bekijken het volgende inhomogene beginwaardenprobleem voor $y(x)$:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y &= 2\cos x - 2\sin x \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

(5) **a.** Los de homogene vergelijking $y'' + 2y' + y = 0$ op. Noem de oplossing $y_\mathrm{h}(x)$.

Dit is een homogene, lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten. Postuleer een oplossing van het type $y_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Substitutie levert de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, oftewel $(\lambda + 1)^2 = 0$. Je vindt dus slechts één oplossing, $\lambda = -1$, met daarbij behorende functie $y_1(x) = e^{-x}$. Vanwege lineariteit is elk veelvoud hiervan eveneens een oplossing. Om de algemene oplossing te vinden postuleren we $y_\mathrm{h}(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-x}$. Substitutie levert $u'' = 0$, met als algemene oplossing $u(x) = A + Bx$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dus

$$y_\mathrm{h}(x) = (A + Bx)e^{-x}\,.$$

(Je herkent hierin twee lineair onafhankelijke oplossingen.)

(5) **b.** Vind een particuliere oplossing van de inhomogene vergelijking. Noem deze $y_\mathrm{p}(x)$.

Hint: Poneer een oplossing van het type $y_\mathrm{p}(x) = a\sin x + b\cos x$.

De hint uitwerken (waarbij het handig is als je vooraf inziet dat $y_\mathrm{p}$ voldoet aan $y'' + y = 0$) levert na substitutie in de inhomogene vergelijking: $a\cos x - b\sin x = \cos x - \sin x$. Dit moet voor alle $x \in \mathbb{R}$ gelden, dus $a = b = 1$, ergo

$$y_\mathrm{p}(x) = \sin x + \cos x\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **c.** Geef de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking zonder beginvoorwaarden.

De algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is de som van de van de algemene oplossing van de homogene vergelijking en een willekeurige particuliere oplossing. Dus

$$y(x) = y_\mathrm{h}(x) + y_\mathrm{p}(x) = (A + Bx)e^{-x} + \sin x + \cos x\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d.** Bepaal de oplossing van het volledige beginwaardenprobleem.

De beginvoorwaarden opleggen levert twee vergelijkingen voor $A$ en $B$ op, nl. $A + 1 = 1$ en $-A + B + 1 = 0$. Oplossing: $A = 0$ en $B = 1$, dus

$$y(x) = -xe^{-x} + \cos x + \sin x\,.$$

***