

HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Donderdag 28 juni 2012. Tijd: 13:00–16:00. Locatie: CIC 1.03

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

(10) 1. VOLLEDIGE INDUCTIE

Bewijs voor $x \in \mathbb{R}$ en geheeltallige $k \geq 0$ dat $\frac{d^k}{dx^k} (x e^{cx}) = (c^k x + k c^{k-1}) e^{cx}$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een constante met $c \neq 0$.

*

(30) 2. DIFFERENTIËREN & TAYLORONTWIKKELING

(10) a. Bewijs de Taylorontwikkeling

$$x e^x = x + x^2 + \frac{1}{2} x^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{rond } x=0.$$

(10) b. Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} (2x - 1)^2$.

(10) c. Bepaal de afgeleide van $f(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^{-t^2} dt$.

*

(30) 3. PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

(10) a. Primitiveer: $\int \frac{\ln^3 |x|}{x} dx$. (N.B. met $\ln^k |x|$ bedoelen we $(\ln |x|)^k$.)

(10) b. Integreer: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{(\sin^2 x + 1) \tan x} dx$. (N.B. met $\sin^k x$ bedoelen we $(\sin x)^k$.)

(10) c. Primitiveer: $\int x^2 e^x dx$.

*

(15) 4. INTEGRAALVERGELIJKINGEN

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) + k \int_0^x y^2(t) e^{-t} dt = p$. Hierin zijn $k, p \in \mathbb{R}$ reële constanten met $k > 0$.

- (5) a. Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' + ky^2 e^{-x} = 0$.
- (5) b. Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking.
- (5) c. Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de parameter c (uitgedrukt in p en k) mag aannemen.

*

(15) 5. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Beschouw de door $c \geq 0$ geparametriseerde familie van eerste orde differentiaalvergelijkingen voor $y(x)$:

$$y'^2 + y^2 = c.$$

- (7 $\frac{1}{2}$) a. Los de tweede orde differentiaalvergelijking $y'' + y = 0$ op onder de beginvoorwaarden $y(0) = A$ en $y'(0) = B$, voor gegeven constanten $A, B \in \mathbb{R}$.
- (7 $\frac{1}{2}$) b. Los nu de oorspronkelijke eerste orde differentiaalvergelijking voor $y(x)$ op en bepaal daarbij tevens het verband tussen c en de bij onderdeel a geïntroduceerde constanten A en B .
