HERTENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Dinsdag 29 januari 2013. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: Matrix 1.44

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering is aangegeven in de kantlijn.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- Alle variabelen en functies zijn reëelwaardig tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven.

Succes!

(10) **1.** VOLLEDIGE INDUCTIE

Bewijs middels volledige inductie dat voor geheeltallige $k \geq 2$ en alle $x > -1$ geldt

$$\frac{d^k}{dx^k}(x\ln(1+x)) = \frac{(-1)^k(k-2)!}{(1+x)^{k-1}}(1+\frac{k-1}{1+x})\,.$$

*

(30) **2.** DIFFERENTIËREN & TAYLORONTWIKKELING

(10) **a.** Bewijs de Taylorontwikkeling

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}) \quad \text{rond } x = 0.$$

(10) **b.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{-x}\cos(2x-1)$.

(10) **c.** Bepaal de afgeleide van $f(x) = \displaystyle\int_1^{x^2+1} \frac{1}{\ln t}\,dt$.

*

(30) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

(10) **a.** Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$.

(10) **b.** Integreer: $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\,(2+\ln|x|)(3+\ln|x|)}\,dx$.

(10) **c.** Primitiveer: $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$.

*

(**15**) **4.** Integraalvergelijkingen

We bekijken de volgende integraalvergelijking voor $y(x)$: $y(x) - \int_0^x e^{-y(t)}\,dt \;=\; p$. Hierin is $p \in \mathbb{R}$ een reële constante.

(5) **a.** Laat zien dat de hierdoor impliciet gegeven functie $y = y(x)$ voldoet aan de niet-lineaire differentiaalvergelijking $y' - e^{-y} = 0$.

(5) **b.** Bepaal de algemene oplossing $y(x)$ van deze differentiaalvergelijking. Noem de integratieconstante c.

(5) **c.** Bepaal de expliciete oplossing $y(x)$ van bovenstaande integraalvergelijking en geef aan welke waarden de integratieconstante c (uitgedrukt in p) mag aannemen en wat het domein van de oplossing is (eveneens uitgedrukt in p) .

*

(**15**) **5.** Differentiaalvergelijkingen

Beschouw de volgende tweede orde differentiaalvergelijking voor $y(x)$:

$$y'' + (1 - x^2)y = 0\,.$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Stel dat $y(x)$ voldoet aan de eerste orde differentiaalvergelijking $y' + xy = 0$. Laat zien dat $y(x)$ dan ook een oplossing is van bovenstaande tweede orde differentiaalvergelijking.

($7\frac{1}{2}$) **b.** Vind een niet-triviale oplossing van de tweede orde differentiaalvergelijking.

***