## TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Donderdag 30 juni 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.30d

**Lees dit eerst!**

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

**(15)** **1.** Complexe getallen

**a.** Los op: $z^3 = 8$.

Oplossing: $z = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$.

**b.** Los op: $e^{iz} = -2$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. (Hint: Schrijf eerst het rechterlid als een complexe e-macht.)

Oplossing: $z = (2k+1)\pi - i \ln 2$ met $k \in \mathbb{Z}$ willekeurig.

**c.** Bewijs: $\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta \sin^2\theta + \sin^4\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. (Hint: $e^{kz} = (e^z)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.)

Oplossing: $\cos(4\theta) = \operatorname{Re} e^{4i\theta} = \operatorname{Re}(e^{i\theta})^4 = \operatorname{Re}(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$.

♣

**(20)** **2.** Differentiëren

**a.** Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $e^x \geq 1 + x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Kies $f(x) = e^x$, zodat $f'(x) = e^x$. Als $x \neq 0$ dan is er volgens de middelwaardestelling een $c$ tussen 0 en $x$ (i.h.b. zal $c$ dus hetzelfde teken hebben als $x$), zodanig dat $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c)$, oftewel $\dfrac{e^x - 1}{x} = e^c$. Voor $c > 0$ geldt $e^c > 1$; voor $c < 0$ geldt $0 < e^c < 1$ en verder is $e^0 = 1$. Conclusie: $\dfrac{e^x - 1}{x} > 1$ als $x > 0$ en $\dfrac{e^x - 1}{x} < 1$ als $x < 0$. In beide gevallen volgt door vermenigvuldiging met $x$ dat $e^x > 1 + x$. Het geval $x = 0$ is triviaal.

**b.** Geef het vierde orde Taylorpolynoom $p_4(x)$ van $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ rond $x = 0$.

We hebben achtereenvolgens $f'(x) = 2x\,e^{x^2} - 2x$, $f''(x) = (4x^2+2)\,e^{x^2} - 2$, $f'''(x) = (8x^3+12x)\,e^{x^2}$, $f''''(x) = (16x^4+48x^2+12)\,e^{x^2}$, zodat $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=0$, $f''''(0)=12$, dus $p_4(x) = \frac{1}{2}\,x^4$.

♣

## (25) 3. Primitiveren en integreren

**a.** Primitiveer: $\displaystyle\int e^{-2x+1}\,dx$

$\displaystyle\int e^{-2x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,e^{-2x+1} + c$, met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig.

**b.** Primitiveer: $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$ (Hint: Tweemaal partieel integreren.)

Tweemaal partieel integreren: $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} x^2\,e^x - 2\int x\,e^x\,dx \overset{\text{p.i.}}{=} x^2\,e^x - 2\left(x\,e^x - \int e^x\,dx\right) = x^2\,e^x - 2x\,e^x + 2e^x + c$, met $c \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Alternatief: Poneer een oplossing van het type $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx = (\alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma)\,e^x$ en bepaal $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ middels differentiatie.

**c.** Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$

Een staartdeling levert $x^4/(x+1) = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$, zodat $\displaystyle\int \frac{x^4}{x+1}\,dx = \int x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + c$.

**d.** Integreer: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. (Hint: Substitueer $y = e^{\sqrt{x}}$.)

Substitueer $y = e^{\sqrt{x}}$, zodat $dy = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$. Dit levert $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^e y\,dy = e^2 - 1$.

**e.** Integreer: $\displaystyle\int_1^{e^{\sqrt{2}}} \frac{\arctan(\ln x)}{x}\,dx$.

Met $y = \ln x$, dus $dy = \dfrac{1}{x}\,dx$, krijgen we $\displaystyle\int_1^{e^{\sqrt{2}}} \frac{\arctan(\ln x)}{x}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} \arctan y\,dy = y\arctan y\,\big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{y}{1+y^2}\,dy = \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3$.

♣

## (40) 4. Differentiaalvergelijkingen

**a.** We noemen een (reële of complexe) functie $y = y(x)$ begrensd indien er een constante $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $|y(x)| < M$ voor alle $x$ in het domein van de functie. Als zo'n $M$ niet bestaat heet de functie onbegrensd. Laat zien dat de volgende differentiaalvergelijking, waarin

$p \in \mathbb{R}$ een reële parameter is, uitsluitend begrensde oplossingen heeft als $p > 0$:

$$y'' + 2p\, y' + 2p^2\, y = 0\,.$$

Substitueer een oplossing van het type $y(x) = e^{\lambda x}$ om de karakteristieke vergelijking te verkrijgen: $\lambda^2 + 2p\,\lambda + 2p^2 = 0$. Oplossing: $\lambda_\pm = (-1 \pm i)p$. Inspectie van de bijbehorende complexe oplossingen, $y_p^\pm(x) = e^{(-1\pm i)px}$—of zo je wil van de corresponderende reële oplossingen, $y_p^{(1)}(x) = e^{-px}\cos(px)$ en $y_p^{(2)}(x) = e^{-px}\sin(px)$—leert dat deze onafhankelijk zijn als $p \neq 0$ en dat het exponentiële gedrag van de functie $e^{-px}$ bepalend is voor het groeigedrag. Voor $p > 0$ geldt $e^{-px} \leq 1$ en dus $|y_p^\pm(x)| \leq 1$, voor $p < 0$ is de oplossing onbegrensd. Als $p = 0$ zie je onmiddellijk dat de oplossing (een willekeurige eerstegraads veeltermfunctie) onbegrensd is.

**b.** Los op: $y'' - 9\,y = 27x$.

De corresponderende homogene differentiaalvergelijking is $y'' - 9\,y = 0$. De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 9 = 0$, waaruit volgt $\lambda_\pm = \pm 3$. De (reëelwaardige) oplossing van het homogene probleem is dus $y_0(x) = A\,e^{3x} + B\,e^{-3x}$, met $A, B \in \mathbb{R}$ willekeurig. Een particuliere oplossing is $y_{\mathrm{p}}(x) = -3x$. Dus $y(x) = A\,e^{3x} + B\,e^{-3x} - 3x$.

**c.** Laat zien dat als $y = y(x)$ een reëelwaardige oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 1$, dan geldt hiervoor $y'(x)^2 + y(x)^2 - 2y(x) = c$ voor een of andere constante $c \in \mathbb{R}$. (Hint: Vermenigvuldig de differentiaalvergelijking wederzijds met $y'$. Je hoeft haar niet op te lossen.)

De hint volgend schrijven we $y'y'' + y'y = y'$, oftewel $\dfrac{d}{dx}\left(y'^2 + y^2 - 2y\right) = 0$. Hieruit volgt $y'(x)^2 + y(x)^2 - 2y(x) = c$. Merk op dat het geval $y' = 0$, dus $y(x) =$ constante, compatibel is met de differentiaalvergelijking mits deze constante gelijke is aan 1. Voor deze oplossing geldt $c = -1$.

Andersom redenerend, uitgaand van de veronderstelling $y'(x)^2 + y(x)^2 - 2y(x) = c$, volgt door differentiatie dat dit equivalent is met de differentiaalvergelijking $y'(y'' + y) = 0$ voor de functie $y = y(x)$, m.a.w. $y' = 0$ of $y'' + y = 0$. Het tweede geval is het relevante hier.

**d.** Los op: $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} & = & \dfrac{1}{x^2} \quad (x > 0) \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$

Een primitieve van $p(x) = 1/x$ is $P(x) = \ln x$. Vermenigvuldig de differentiaalvergelijking links en rechts met $e^{P(x)} = x$, dit levert $\dfrac{d}{dx}(x\,y) = \dfrac{1}{x}$, oftewel $y(x) = \dfrac{c + \ln x}{x}$ voor een of andere $c \in \mathbb{R}$. De extra conditie levert $y(1) = c = 1$, zodat $y(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$.

**EINDE**