TENTAMEN CALCULUS

Vakcode: 2DM10. Datum: Donderdag 30 juni 2011. Tijd: 09:00–12:00. Locatie: HG 10.30d

Lees dit eerst!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering voor elke vraag is aangegeven in de kantlijn. Alle onderdelen van een vraag hebben hetzelfde gewicht.
- Het gebruik van boek, calculator, laptop of andere hulpmiddelen is niet toegestaan.
- De stervraag is facultatief en telt niet mee voor het eindcijfer. Een correct antwoord levert echter een bonuspunt voor het BMT honors programma.

SUCCES!

(15) **1.** COMPLEXE GETALLEN

a. Los op: $z^3 = 8$.

b. Los op: $e^{iz} = -2$. Geef je antwoord in de vorm $z = x + i\,y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. (Hint: Schrijf eerst het rechterlid als een complexe e-macht.)

c. Bewijs: $\cos(4\theta) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ voor $\theta \in \mathbb{R}$. (Hint: $e^{kz} = (e^z)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.)

♣

(20) **2.** DIFFERENTIËREN

a. Bewijs met behulp van de middelwaardestelling: $e^x \geq 1 + x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

b. Geef het vierde orde Taylorpolynoom $p_4(x)$ van $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$ rond $x = 0$.

♣

(25) **3.** PRIMITIVEREN EN INTEGREREN

a. Primitiveer: $\displaystyle\int e^{-2x+1}\,dx$

b. Primitiveer: $\displaystyle\int x^2\,e^x\,dx$ (Hint: Tweemaal partieel integreren.)

c. Primitiveer: $\displaystyle\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$

d. Integreer: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. (Hint: Substitueer $y = e^{\sqrt{x}}$.)

e. Integreer: $\displaystyle\int_1^{e^{\sqrt{2}}} \frac{\arctan(\ln x)}{x}\,dx$.

♣

(**40**) **4.** Differentiaalvergelijkingen

a. We noemen een (reële of complexe) functie $y = y(x)$ begrensd indien er een constante $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $|y(x)| < M$ voor alle x in het domein van de functie. Als zo'n M niet bestaat heet de functie onbegrensd. Laat zien dat de volgende differentiaalvergelijking, waarin $p \in \mathbb{R}$ een reële parameter is, uitsluitend begrensde oplossingen heeft als $p \geq 0$:

$$y'' + 2p\,y' + 2p^2\,y = 0\,.$$

b. Los op: $y'' - 9\,y = 27x$.

c. Laat zien dat als $y = y(x)$ een reëelwaardige oplossing is van de differentiaalvergelijking $y'' + y = 1$, dan geldt hiervoor $y'(x)^2 + y(x)^2 - 2y(x) = c$ voor een of andere constante $c \in \mathbb{R}$. (Hint: Vermenigvuldig de differentiaalvergelijking wederzijds met y'. Je hoeft haar niet op te lossen.)

d. Los op: $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2} & (x > 0) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

EINDE