TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Donderdag 8 juli 2004. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: MA 1.44/1.46

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** Onderstaande figuur toont een (reëelwaardig) grijswaardenbeeld f opgebouwd uit 9 pixels, waarvan de numerieke waarden zijn aangegeven. De pixels worden op de gebruikelijke manier geïndexeerd door een coördinatenpaar $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, waarbij $i = 1, 2, 3$ de horizontale positie en $j = 1, 2, 3$ de verticale positie weergeeft. Het pixel linksonder heeft coördinaten $(i, j) = (1, 1)$. Voor het gemak denken we dit beeld oneindig voortgezet buiten het fysieke indexgebied middels "zero-padding", dat wil zeggen $f[i, j] = 0$ voor alle $i, j \in \mathbb{Z}$ waarvoor $i \notin \{1, 2, 3\}$ of $j \notin \{1, 2, 3\}$. Het resultaat hiervan is dus een functie van het type $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2	0	2
4	–6	3
0	4	0

We bekijken drie definities voor de discrete eerste orde horizontale partiële afgeleide van f. We duiden de overeenkomstige discrete operatoren aan met H_1^1, H_2^1, respectievelijk H_3^1. (N.B. Met het subscript onderscheiden we de drie definities. Het gemeenschappelijke superscript geeft aan dat het hier in alle gevallen om een eerste orde afgeleide gaat. Wees secuur in je notatie v.w.b. sub- en superscripts.)

Definitie 1: $(H_1^1 f)[i, j] = f[i + 1, j] - f[i, j]$.

Definitie 2: $(H_2^1 f)[i, j] = \dfrac{f[i + 1, j] - f[i - 1, j]}{2}$.

Definitie 3: $(H_3^1 f)[i,j] = f_{\text{int}}(i+\frac{1}{2},j) - f_{\text{int}}(i-\frac{1}{2},j)$. Hierin is $f_{\text{int}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de functie die verkregen wordt middels bilineaire interpolatie van het discrete beeld f.

(10) **a.** Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f de afgeleide beelden $(H_1^1 f)[i,j]$ en $(H_2^1 f)[i,j]$ voor het fysieke indexgebied $1 \leq i,j \leq 3$ (gebruik hiervoor de *bijlage*).

−2	2	−2
−10	9	−3
4	−4	0

(a) $H_1^1 f$

0	0	0
−3	−0.5	3
2	0	−2

(b) $H_2^1 f$

(5) **b.** Toon aan dat Definities 2 en 3 equivalent zijn.

De geïnterpoleerde signaalwaarden $f_{\text{int}}(i\pm\frac{1}{2},j)$ volgen door middeling uit $f[i,j]$ en $f[i\pm 1,j]$: $f_{\text{int}}(i\pm\frac{1}{2},j) = \frac{f[i,j]+f[i\pm 1,j]}{2}$. Dus volgt dat $H_3^1 f[i,j] = f_{\text{int}}(i+\frac{1}{2},j) - f_{\text{int}}(i-\frac{1}{2},j) = \frac{f[i,j]+f[i+1,j]}{2} - \frac{f[i,j]+f[i-1,j]}{2} = \frac{f[i+1,j]-f[i-1,j]}{2} = H_2^1 f[i,j]$.

We definiëren voorts de discrete tweede orde horizontale partiële afgeleide van f, als volgt. (N.B. Het superscript geeft aan dat het om een tweede orde afgeleide gaat; aangezien er maar één definitie is laten we een subscript achterwege.)

Definitie 4: $(H^2 f)[i,j] = f[i+1,j] - 2f[i,j] + f[i-1,j]$.

(5) **c.** Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f het afgeleide beeld $(H^2 f)[i,j]$ voor het fysieke indexgebied $1 \leq i,j \leq 3$ (gebruik hiervoor de *bijlage*).

−4	4	−4
−14	19	−12
4	−8	4

(c) $H^2 f$

(5) **d.** Laat zien dat Definities 1 en 2 overeenkomen in pixels waarvoor geldt $(H^2 f)[i,j] = 0$.

Stel $(H_1^1 f)[i,j] = (H_2^1 f)[i,j]$, d.i. $f[i+1,j] - f[i,j] = \dfrac{f[i+1,j] - f[i-1,j]}{2}$, oftewel $\dfrac{f[i+1,j] - 2f[i,j] + f[i-1,j]}{2} = (H^2 f)[i,j] = 0$.

❦

(35) **2.** $C_0^2([0,1])$ is de klasse van tweemaal continu differentieerbare, reële functies van het type $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, waarvoor geldt $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$. (Met $f'(0)$ en $f'(1)$ bedoelen we de rechter, resp. linkerafgeleide in het betreffende punt.) Zonder bewijs delen we mee dat $C^2([0,1])$, de klasse van reëelwaardige functies op het gesloten interval $[0,1]$ welke tweemaal continu differentieer zijn, een lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Bewijs dat $C_0^2([0,1])$ een lineaire ruimte is.
(*Hint:* $C_0^2([0,1]) \subset C^2([0,1])$.)

Aangezien $C_0^2([0,1]) \subset C^2([0,1])$, waarbij $C^2([0,1])$ een lineaire ruimte is, volstaat het te bewijzen dat $C_0^2([0,1])$ gesloten is t.a.v. vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. Stel $f, g \in C_0^2([0,1])$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan geldt dat $\lambda f + \mu g$ wederom tweemaal continu differentieerbaar is (want per definitie hebben we $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$, enz.). In het bijzonder geldt dat $(\lambda f + \mu g)(r) = \lambda f(r) + \mu g(r) = 0$ en $(\lambda f + \mu g)'(r) = \lambda f'(r) + \mu g'(r) = 0$ voor randpunten $r \in \{0,1\}$, dus $\lambda f + \mu g$ voldoet ook aan de randvoorwaarden, m.a.w. $\lambda f + \mu g \in C_0^2([0,1])$.

We voorzien de lineaire ruimte $C_0^2([0,1])$ van een reëel inprodukt volgens één van onderstaande definities. Het subscript geeft aan om welke definitie het gaat, vergeet dus niet dit telkens in je notatie te vermelden.

Definitie 1: Voor $f, g \in C_0^2([0,1])$,

$$\langle f|g\rangle_1 = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx + \int_0^1 f'(x)\, g'(x)\, dx\,.$$

Definitie 2: Voor $f, g \in C_0^2([0,1])$,

$$\langle f|g\rangle_2 = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\, g(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\, g''(x)\, dx\,.$$

(5) **b.** Laat zien dat Definitie 1 een goede definitie is, d.w.z. inderdaad een inprodukt definieert.

Stel $f, g, h \in C_0^2([0,1])$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dan is zowel $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$ als $\int_0^1 f'(x)\, g'(x)\, dx$ goed gedefinieerd, dus $\langle f|g\rangle_1 \in \mathbb{R}$. Voorts:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda f + \mu g | h\rangle_1 &= \int_0^1 (\lambda f + \mu g)(x)\, h(x)\, dx + \int_0^1 (\lambda f + \mu g)'(x)\, h'(x)\, dx \\
&= \int_0^1 (\lambda f(x) + \mu g(x))\, h(x)\, dx + \int_0^1 (\lambda f'(x) + \mu g'(x))\, h'(x)\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\left(\int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,h'(x)\,dx\right) + \mu\left(\int_0^1 g(x)\,h(x)\,dx + \int_0^1 g'(x)\,h'(x)\,dx\right)\\
&= \lambda\,\langle f|h\rangle_1 + \mu\,\langle g|h\rangle_1\,,\\
\langle f|\lambda\,g + \mu\,h\rangle_1 &= \int_0^1 f(x)\,(\lambda\,g + \mu\,h)(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,(\lambda\,g + \mu\,h)'(x)\,dx\\
&= \int_0^1 f(x)\,(\lambda\,g(x) + \mu\,h(x))\,dx + \int_0^1 f'(x)\,(\lambda\,g'(x) + \mu\,h'(x))\,dx\\
&= \lambda\left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx\right) + \mu\left(\int_0^1 f(x)\,h(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,h'(x)\,dx\right)\\
&= \lambda\,\langle f|g\rangle_1 + \mu\,\langle f|h\rangle_1\,,\\
\langle f|g\rangle_1 &= \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx\\
&= \langle g|f\rangle_1 \quad \text{o.g.v. commutativiteit van de gewone vermenigvuldiging,}\\
\langle f|f\rangle_1 &= \int_0^1 (f(x))^2\,dx + \int_0^1 (f'(x))^2\,dx > 0 \quad \text{als } f \text{ niet de nulfunctie is.}
\end{aligned}
$$

(5) **c.** Bewijs dat beide definities equivalent zijn.
(*Hint:* Partiële integratie.)

M.b.v. partiële integratie volgt dat

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f''(x)\,g(x)\,dx &= \Big[f'(x)\,g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx &&= -\int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx \quad \text{evenals}\\
\int_0^1 f(x)\,g''(x)\,dx &= \Big[f(x)\,g'(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx &&= -\int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx\,.
\end{aligned}
$$

De stoktermen vallen weg o.g.v. de randvoorwaarden waaraan $f, g \in C_0^2([0,1])$ voldoen. Door deze gelijkheden te substitueren in Definitie 2 volgt dat $\langle f|g\rangle_2 = \langle f|g\rangle_1$.

Op grond van equivalentie mag je voortaan het subscript weglaten: $\langle f|g\rangle = \langle f|g\rangle_1 = \langle f|g\rangle_2$. M.b.v. dit inprodukt voeren we, voor willekeurige vaste $h \in C_0^2([0,1])$, de volgende lineaire afbeelding $P_h : C_0^2([0,1]) \to C_0^2([0,1])$ in:

Definitie: $P_h(f) = \dfrac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h$.

(5) **d.** Toon aan dat $P_h \circ P_h = P_h$. De infix operator $\circ$ duidt op samenstelling.

Neem een willekeurige $f \in C_0^2([0,1])$. Dan geldt

$$
(P_h \circ P_h)\,(f) = P_h\,(P_h(f)) = \frac{\langle h|P_h(f)\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h = \frac{\langle h|\frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h = \frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\,\frac{\langle h|h\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h = \frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\,h = P_h(f)\,.
$$

Bij de derde gelijkheid is gebruik gemaakt van de lineariteit van het inprodukt m.b.t. het tweede argument, de rest volgt uit de definitie van de samenstellingsoperator $\circ$, resp. van P_h. Omdat dit voor alle $f \in C_0^2([0,1])$ geldt volgt $P_h \circ P_h = P_h$ (idempotentie).

(5) **e.** Toon aan dat $P_h^\dagger = P_h$, d.w.z. $\langle g|P_h f\rangle = \langle P_h g|f\rangle$ voor alle $f, g \in C_0^2([0,1])$.

Gebruik makend van bilineariteit van het reële inprodukt, de definitie van P_h en enkele triviale herschrijvingen vind je

$$\langle g|P_h f\rangle = \langle g|\frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\, h\rangle = \frac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\,\langle g|h\rangle = \frac{\langle h|g\rangle}{\langle h|h\rangle}\,\langle h|f\rangle = \langle \frac{\langle h|g\rangle}{\langle h|h\rangle}\, h|f\rangle = \langle P_h g|f\rangle\,.$$

Algemene eigenschappen van het reële inprodukt zijn hierin gebruikt in stappen 2 (lineariteit m.b.t. tweede argument), 3 (symmetrie) en 4 (lineariteit m.b.t. eerste argument).

Beschouw het volgende tweetal functies (merk op dat $f(x) = f(1-x)$ en $g(x) = g(1-x)$):

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (0 \le x \le 1) \quad \text{en} \quad g(x) = \begin{cases} -4x^3 + 3x^2 & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ -4(1-x)^3 + 3(1-x)^2 & (\frac{1}{2} \le x \le 1) \end{cases}$$

(5) **f.** Laat zien dat $f, g \in C_0^2([0,1])$.

Veeltermfuncties zijn oneindig vaak differentieerbaar, dus i.h.b. geldt dat f tweemaal continue differentieerbaar is. Bij g moeten we het “verdachte” punt $x = \frac{1}{2}$ nader bekijken:

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} g(x) &= \frac{1}{4} \\ \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} g(x) &= \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

hetgeen overigens ook direct volgt uit de symmetrie observatie dat $g(x) = g(1-x)$. De functie g is dus continu (in $x = \frac{1}{2}$ en daarmee overal). Verder:

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} g'(x) &= \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} (-12x^2 + 6x) &= 0 \\ \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} g'(x) &= \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} (12(1-x)^2 - 6(1-x)) &= 0\,. \end{aligned}$$

De functie g is dus continu differentieerbaar in $x = \frac{1}{2}$ met $g'(\frac{1}{2}) = 0$. Voorts:

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} g''(x) &= \lim_{x\uparrow\frac{1}{2}} (-24x + 6) &= -6 \\ \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} g''(x) &= \lim_{x\downarrow\frac{1}{2}} (-24(1-x) + 6) &= -6\,. \end{aligned}$$

De functie g' is derhalve ook continu differentieerbaar in $x = \frac{1}{2}$ met $g''(\frac{1}{2}) = -6$. Al met al volgt dat g tweemaal continu differentieerbaar is in $x = \frac{1}{2}$ en daarmee overal. Tenslotte moeten we de randvoorwaarden controleren: We hebben $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ en $g'(x) = -12x^2 + 6x$ voor $x < \frac{1}{2}$ en $g'(x) = -g'(1-x)$ voor $x > \frac{1}{2}$, dus $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0$ en dito voor g, waarbij de randafgeleiden gedefinieerd zijn als volgt:

$$\begin{aligned} f'(0) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\downarrow 0} f'(x) \\ f'(1) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\uparrow 1} f'(x)\,. \end{aligned}$$

(5) **g.** Bepaal het expliciete functievoorschrift van de functie $P_g(f)$.

Ampel rekenwerk levert:

$$P_g(f) = \frac{\langle g|f\rangle}{\langle g|g\rangle}\, g = \frac{t}{n}\, g\,,$$

waarin, als $g_{\mathrm{L}}(x) = -4x^3 + 3x^2$ en $g_{\mathrm{R}}(x) = -4(1-x)^3 + 3(1-x)^2$,

$$t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} g_{\mathrm{L}}(x)\, f(x) + g_{\mathrm{L}}'(x)\, f'(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} g_{\mathrm{R}}(x)\, f(x) + g_{\mathrm{R}}'(x)\, f'(x)\, dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} g_{\mathrm{L}}(x)\, f(x) + g_{\mathrm{L}}'(x)\, f'(x)\, dx = \frac{2179}{26880}$$

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} (g_{\mathrm{L}}(x))^2 + \left(g_{\mathrm{L}}'(x)\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (g_{\mathrm{R}}(x))^2 + \left(g_{\mathrm{R}}'(x)\right)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (g_{\mathrm{L}}(x))^2 + \left(g_{\mathrm{L}}'(x)\right)^2 dx = \frac{181}{560}\,.$$

Al met al:

$$P_g(f) = \frac{2179}{8688}\, g$$

N.B. Dit onderdeel is niet meegerekend in de eindbeoordeling.

❦

(30) **3.** In deze opgave bekijken we de discontinue stapfunctie ("ideal step edge")

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } t = 0 \\ 1 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

(5) **a.** Geef het functievoorschrift voor de klassieke afgeleide $\theta'(t)$. Vergeet hierbij niet aan te geven wat het definitiegebied is.

$$\theta'(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t \neq 0 \\ \text{niet gedefinieerd} & \text{als } t = 0 \end{cases}$$

Beschouw de ruimte van gladde testfuncties, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, en de bijbehorende duale ruimte van getemperde distributies, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. We definiëren de distributionele afgeleide van een getemperde distributie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ als de getemperde distributie $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ welke gegeven wordt door $T'[\phi] = -T[\phi']$ voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Een bijzondere klasse van getemperde distributies is die van de zgn. reguliere getemperde distributies. Roep in herinnering dat een getemperde distributie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ regulier heet indien er een (bijna overal gedefinieerde) functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat z.d.d.

$$T[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, dt$$

voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. We noemen de functie f een *Riesz representant* van T. Om aan te geven dat T regulier is met Riesz representant f schrijven we meestal T_f i.p.v. T. (Let op: de zgn. Dirac "deltafunctie" δ is géén functie!)

Beschouw de met de functie θ geassocieerde reguliere getemperde distributie $T_\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dus

$$T_\theta[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, \phi(t)\, dt\,.$$

(5) **b.** Laat zien dat de klassieke afgeleide functie θ' uit onderdeel a géén geschikte Riesz representant kan zijn voor de distributionele afgeleide T'_θ van T_θ, d.w.z. laat zien dat i.h.a. $T'_\theta[\phi] \neq T_{\theta'}[\phi]$.

Uit voorgaand onderdeel blijkt dat $T_{\theta'}[\phi] = 0$ voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dus $T_{\theta'} = 0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (de nuldistributie). Echter $T'_\theta[\phi] = -T_\theta[\phi'] = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\,\phi'(t)\,dt = -\int_0^\infty \phi'(t)\,dt = \phi(0)$. I.h.a. is dit niet nul, dus $T'_\theta \neq T_{\theta'}$.

We bekijken de 1-parameter familie van testfuncties, met $\tau > 0$, gegeven door

$$\phi_\tau(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2}\right) .$$

In onderstaande vragen kun je gebruik maken van de volgende definitie van de *errorfunctie*:

$$\operatorname{erf}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds .$$

Eigenschappen: $\operatorname{erf}(-\infty) = 0$, $\operatorname{erf}(0) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

(5) **c.** Laat zien dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\tau(t)\,dt = 1$ ongeacht de waarde van $\tau > 0$.
(*Hint:* Er zijn 2 alternatieven: 1. Gebruik definitie en eigenschappen van de errorfunctie. 2. Noem de integraal $I(\tau)$. Laat zien dat zijn kwadraat geschreven kan worden als $I^2(\tau) = \displaystyle\int_0^\infty r \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) dr$ en bereken zijn waarde.)

Methode 1: De functie erf is de primitieve van ϕ_1, dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\tau(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(s)\,ds = \lim_{t\to\infty} \operatorname{erf}(t) = 1 .$$

De eerste gelijkheid hierin volgt middels substitutie van variabelen $t = \tau s$ (dus $dt = \tau\,ds$ en integratiegrenzen blijven ongewijzigd), de tweede uit de definitie van erf.

Methode 2: Het kwadraat van $I(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\tau(t)\,dt$ kan geschreven worden als

$$I^2(\tau) = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s^2+t^2}{\tau^2}\right) dsdt = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2}{\tau^2}\right) drd\phi = \int_0^\infty \rho \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) d\rho .$$

In de tweede stap is gebruik gemaakt van substitutie van variabelen naar poolcoördinaten, $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ (dus $dxdy = rdrd\phi$). De derde stap maakt gebruik van de ϕ-onafhankelijkheid van de integrand: $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$, en wederom van substitutie van variabelen: $r = \tau\rho$ (dus $dr = \tau d\rho$). Het rechterlid is eenvoudig te berekenen door primitiveren:

$$\int_0^\infty \rho \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right) d\rho = \left[-\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)\right]_0^\infty = 1 .$$

Uit $I^2(\tau) = 1$ en het feit dat $I(\tau)$ positief moet zijn (aangezien de integrand strict positief is) volgt $I(\tau) = 1$.

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Bereken $T_\theta[\phi_\tau]$.

Uitschrijven van de definitie levert

$$T_\theta[\phi_\tau] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\,\phi_\tau(t)\,dt = \int_0^\infty \phi_\tau(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\tau(t)\,dt = \frac{1}{2} .$$

De voorlaatste stap maakt gebruik van het feit dat ϕ_τ een even functie is. In de laatste stap is het resultaat van het vorige onderdeel gebruikt.

$(2\frac{1}{2})$ **d2.** Bereken $T'_\theta[\phi_\tau]$.

Uitschrijven van de definitie levert

$$T'_\theta[\phi_\tau] = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\,\phi'_\tau(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \phi'_\tau(t)\,dt = \phi_\tau(0) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}\,.$$

De voorlaatste stap maakt gebruik van het feit dat $\phi_\tau \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, zodat $\lim_{t\to\infty}\phi_\tau(t) = 0$. In de laatste stap is de definitie van ϕ_τ gebruikt.

We beschouwen nu het convolutieprodukt $\theta_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\theta * \phi_\tau)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(t-s)\,ds$.

$(2\frac{1}{2})$ **e1.** Laat zien dat $\theta_\tau(0) = T_\theta[\phi_\tau]$.

Uit de definitie van convolutie volgt

$$\theta_\tau(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(-s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(s)\,ds = T_\theta[\phi_\tau]\,.$$

In de voorlaatste stap is gebruik gemaakt van het feit dat ϕ_τ even is en in de laatste van de Riesz representatie van T_θ.

$(2\frac{1}{2})$ **e2.** Laat zien dat $\theta'_\tau(0) = T'_\theta[\phi_\tau]$.

Uit de definitie van convolutie volgt

$$\theta'_\tau(0) = \left.\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(t-s)\,ds\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi'_\tau(-s)\,ds = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi'_\tau(s)\,ds = -T_\theta[\phi'_\tau] = T'_\theta[\phi_\tau]\,.$$

In de derde stap is gebruik gemaakt van het feit dat ϕ'_τ oneven is, in de vierde van de Riesz representatie van T_θ en in de laatste van de definitie van een distributionele afgeleide.

(5) **e3.** Bereken $\theta_\tau(t)$ in termen van de hierboven gedefinieerde errorfunctie.

In de tweede, derde en vierde stap hieronder is wederom substitutie van variabelen toegepast. De eerste en laatste stap betreffen definities:

$$\theta_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t-u)\,\phi_\tau(u)\,du = \int_{-\infty}^{t} \phi_\tau(u)\,du = \int_{-\infty}^{\frac{t}{\tau}} \phi_1(v)\,dv = \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\tau}\right)\,.$$

Merk op dat dit resultaat consistent is met het antwoord op onderdeel d.

❦

(*10*) **4.** In deze opgave gebruiken we de volgende definitie van ééndimensionale Fourier transformatie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

We beschouwen voortaan uitsluitend reëelwaardige functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in het temporele domein. In onderstaande vragen mag je desgewenst gebruik maken van de volgende standaardintegraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi\,.$$

Beschouw nu de functie

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{voor } t \neq 0.$$

(5) **a.** Laat zien dat de Fourier getransformeerde functie $\widehat{f}$ zuiver imaginair is door te bewijzen dat

$$\widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega t)\, dt\,.$$

Deze eigenschap volgt uit de symmetrie-overwegingen $f(t) = -f(-t)$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, en uit de eigenschap $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, als volgt: $\widehat{f}(\omega) = \mathrm{Re}\,\widehat{f}(\omega) + i\,\mathrm{Im}\,\widehat{f}(\omega)$, dus

$$\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \cos(\omega t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\, \cos(\omega t)\, dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \cos(-\omega s)\, ds = -\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \cos(\omega s)\, ds = -\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\omega)\,,$$

m.a.w. $\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\omega) = 0$, waaruit het bewijs volgt. In de derde stap is substitutie van variabelen toegepast: $t = -s$.

(5) **b.** Bewijs dat, voor $\omega \neq 0$, $\widehat{f}(\omega)$ uitsluitend van het teken, maar niet van de waarde van ω afhangt. (*Hint:* Substitutie van variabelen: $\omega t = s$. Let op de implicaties van het teken van ω.)

Stel $\omega \neq 0$. Substitutie van variabelen $s = \omega t$, dus $ds = |\omega|\, dt$ bij ongewijzigde integratiegrenzen (let op de modulus!), geeft:

$$\widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt = -i\, \frac{\omega}{|\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}\,\omega\,.$$

(De expliciete, laatste stap is niet essentieel voor het bewijs; $\mathrm{sgn}\,\omega$ is hierin gedefinieerd als het teken van ω.) Als $\omega = 0$ zie je onmiddellijk dat $\widehat{f}(\omega) = 0$, dus blijft de laatste uitdrukking geldig indien we afspreken dat $\mathrm{sgn}\,0 = 0$.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: **Studentnummer:**

2	0	2
4	−6	3
0	4	0

Figuur 1: Nogmaals het 3×3-beeld zoals gegeven in vraag 1.

(a) $H_1^1 f$

(b) $H_2^1 f$

Figuur 2: Vul pixelwaarden in conform je antwoorden op onderdeel a van vraag 1.

(a) $H^2 f$

Figuur 3: Vul pixelwaarden in conform je antwoord op onderdeel c van vraag 1.