TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Donderdag 8 juli 2004. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: MA 1.44/1.46

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(25) **1.** Onderstaande figuur toont een (reëelwaardig) grijswaardenbeeld f opgebouwd uit 9 pixels, waarvan de numerieke waarden zijn aangegeven. De pixels worden op de gebruikelijke manier geïndexeerd door een coördinatenpaar $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, waarbij $i = 1, 2, 3$ de horizontale positie en $j = 1, 2, 3$ de verticale positie weergeeft. Het pixel linksonder heeft coördinaten $(i, j) = (1, 1)$. Voor het gemak denken we dit beeld oneindig voortgezet buiten het fysieke indexgebied middels “zero-padding”, dat wil zeggen $f[i, j] = 0$ voor alle $i, j \in \mathbb{Z}$ waarvoor $i \notin \{1, 2, 3\}$ of $j \notin \{1, 2, 3\}$. Het resultaat hiervan is dus een functie van het type $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

2	0	2
4	–6	3
0	4	0

We bekijken drie definities voor de discrete eerste orde horizontale partiële afgeleide van f. We duiden de overeenkomstige discrete operatoren aan met H_1^1, H_2^1, respectievelijk H_3^1. (N.B. Met het subscript onderscheiden we de drie definities. Het gemeenschappelijke superscript geeft aan dat het hier in alle gevallen om een eerste orde afgeleide gaat. Wees secuur in je notatie v.w.b. sub- en superscripts.)

Definitie 1: $(H_1^1 f)[i, j] = f[i + 1, j] - f[i, j]$.

Definitie 2: $(H_2^1 f)[i, j] = \dfrac{f[i + 1, j] - f[i - 1, j]}{2}$.

Definitie 3: $(H_3^1 f)[i,j] = f_{\rm int}(i+\frac{1}{2},j) - f_{\rm int}(i-\frac{1}{2},j)$. Hierin is $f_{\rm int} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de functie die verkregen wordt middels bilineaire interpolatie van het discrete beeld f.

(10) **a.** Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f de afgeleide beelden $(H_1^1 f)[i,j]$ en $(H_2^1 f)[i,j]$ voor het fysieke indexgebied $1 \le i,j \le 3$ (gebruik hiervoor de *bijlage*).

(5) **b.** Toon aan dat Definities 2 en 3 equivalent zijn.

We definiëren voorts de discrete tweede orde horizontale partiële afgeleide van f, als volgt. (N.B. Het superscript geeft aan dat het om een tweede orde afgeleide gaat; aangezien er maar één definitie is laten we een subscript achterwege.)

Definitie 4: $(H^2 f)[i,j] = f[i+1,j] - 2f[i,j] + f[i-1,j]$.

(5) **c.** Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f het afgeleide beeld $(H^2 f)[i,j]$ voor het fysieke indexgebied $1 \le i,j \le 3$ (gebruik hiervoor de *bijlage*).

(5) **d.** Laat zien dat Definities 1 en 2 overeenkomen in pixels waarvoor geldt $(H^2 f)[i,j] = 0$.

❦

(35) **2.** $C_0^2([0,1])$ is de klasse van tweemaal continu differentieerbare, reële functies van het type $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, waarvoor geldt $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. (Met $f'(0)$ en $f'(1)$ bedoelen we de rechter, resp. linkerafgeleide in het betreffende punt.) Zonder bewijs delen we mee dat $C^2([0,1])$, de klasse van reëelwaardige functies op het gesloten interval $[0,1]$ welke tweemaal continu differentieer zijn, een lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Bewijs dat $C_0^2([0,1])$ een lineaire ruimte is.
(*Hint:* $C_0^2([0,1]) \subset C^2([0,1])$.)

We voorzien de lineaire ruimte $C_0^2([0,1])$ van een reëel inprodukt volgens één van onderstaande definities. Het subscript geeft aan om welke definitie het gaat, vergeet dus niet dit telkens in je notatie te vermelden.

Definitie 1: Voor $f, g \in C_0^2([0,1])$,

$$\langle f|g\rangle_1 = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,g'(x)\,dx\,.$$

Definitie 2: Voor $f, g \in C_0^2([0,1])$,

$$\langle f|g\rangle_2 = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\,g(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,g''(x)\,dx\,.$$

(5) **b.** Laat zien dat Definitie 1 een goede definitie is, d.w.z. inderdaad een inprodukt definieert.

(5) **c.** Bewijs dat beide definities equivalent zijn.
(*Hint:* Partiële integratie.)

Op grond van equivalentie mag je voortaan het subscript weglaten: $\langle f|g\rangle = \langle f|g\rangle_1 = \langle f|g\rangle_2$. M.b.v. dit inprodukt voeren we, voor willekeurige vaste $h \in C_0^2([0,1])$, de volgende lineaire afbeelding $P_h : C_0^2([0,1]) \to C_0^2([0,1])$ in:

Definitie: $P_h(f) = \dfrac{\langle h|f\rangle}{\langle h|h\rangle}\, h$.

(5) **d.** Toon aan dat $P_h \circ P_h = P_h$. De infix operator $\circ$ duidt op samenstelling.

(5) **e.** Toon aan dat $P_h^\dagger = P_h$, d.w.z. $\langle g|P_h f\rangle = \langle P_h g|f\rangle$ voor alle $f, g \in C_0^2([0,1])$.

Beschouw het volgende tweetal functies (merk op dat $f(x) = f(1-x)$ en $g(x) = g(1-x)$):

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (0 \le x \le 1) \quad \text{en} \quad g(x) = \begin{cases} -4x^3 + 3x^2 & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ -4(1-x)^3 + 3(1-x)^2 & (\frac{1}{2} \le x \le 1) \end{cases}$$

(5) **f.** Laat zien dat $f, g \in C_0^2([0,1])$.

(5) **g.** Bepaal het expliciete functievoorschrift van de functie $P_g(f)$.

❦

(*30*) **3.** In deze opgave bekijken we de discontinue stapfunctie ("ideal step edge")

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } t = 0 \\ 1 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

(5) **a.** Geef het functievoorschrift voor de klassieke afgeleide $\theta'(t)$. Vergeet hierbij niet aan te geven wat het definitiegebied is.

Beschouw de ruimte van gladde testfuncties, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, en de bijbehorende duale ruimte van getemperde distributies, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. We definiëren de distributionele afgeleide van een getemperde distributie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ als de getemperde distributie $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ welke gegeven wordt door $T'[\phi] = -T[\phi']$ voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Een bijzondere klasse van getemperde distributies is die van de zgn. reguliere getemperde distributies. Roep in herinnering dat een getemperde distributie $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ regulier heet indien er een (bijna overal gedefinieerde) functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaat z.d.d.

$$T[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, dt$$

voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. We noemen de functie f een *Riesz representant* van T. Om aan te geven dat T regulier is met Riesz representant f schrijven we meestal T_f i.p.v. T. (Let op: de zgn. Dirac "deltafunctie" δ is géén functie!)

Beschouw de met de functie θ geassocieerde reguliere getemperde distributie $T_\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dus

$$T_\theta[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\,\phi(t)\,dt\,.$$

(5) **b.** Laat zien dat de klassieke afgeleide functie θ' uit onderdeel a géén geschikte Riesz representant kan zijn voor de distributionele afgeleide T'_θ van T_θ, d.w.z. laat zien dat i.h.a. $T'_\theta[\phi] \neq T_{\theta'}[\phi]$.

We bekijken de 1-parameter familie van testfuncties, met $\tau > 0$, gegeven door

$$\phi_\tau(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2}\right)\,.$$

In onderstaande vragen kun je gebruik maken van de volgende definitie van de *errorfunctie*:

$$\mathrm{erf}\,(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right)\,ds\,.$$

Eigenschappen: $\mathrm{erf}\,(-\infty) = 0$, $\mathrm{erf}\,(0) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{erf}\,(\infty) = 1$.

(5) **c.** Laat zien dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\tau(t)\,dt = 1$ ongeacht de waarde van $\tau > 0$.
(*Hint:* Er zijn 2 alternatieven: 1. Gebruik definitie en eigenschappen van de errorfunctie. 2. Noem de integraal $I(\tau)$. Laat zien dat zijn kwadraat geschreven kan worden als $I^2(\tau) = \displaystyle\int_0^{\infty} r\,\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\,dr$ en bereken zijn waarde.)

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Bereken $T_\theta[\phi_\tau]$.

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Bereken $T'_\theta[\phi_\tau]$.

We beschouwen nu het convolutieprodukt $\theta_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\theta * \phi_\tau)(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \theta(s)\,\phi_\tau(t-s)\,ds$.

($2\frac{1}{2}$) **e1.** Laat zien dat $\theta_\tau(0) = T_\theta[\phi_\tau]$.

($2\frac{1}{2}$) **e2.** Laat zien dat $\theta'_\tau(0) = T'_\theta[\phi_\tau]$.

(5) **e3.** Bereken $\theta_\tau(t)$ in termen van de hierboven gedefinieerde errorfunctie.

❦

(*10*) **4.** In deze opgave gebruiken we de volgende definitie van ééndimensionale Fourier transformatie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

We beschouwen voortaan uitsluitend reëelwaardige functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in het temporele domein. In onderstaande vragen mag je desgewenst gebruik maken van de volgende standaardintegraal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds = \pi\,.$$

Beschouw nu de functie

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{voor } t \neq 0.$$

(5) **a.** Laat zien dat de Fourier getransformeerde functie $\widehat{f}$ zuiver imaginair is door te bewijzen dat

$$\widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \sin(\omega t)\, dt\,.$$

(5) **b.** Bewijs dat, voor $\omega \neq 0$, $\widehat{f}(\omega)$ uitsluitend van het teken, maar niet van de waarde van ω afhangt. (*Hint:* Substitutie van variabelen: $\omega t = s$. Let op de implicaties van het teken van ω.)

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: **Studentnummer:**

2	0	2
4	−6	3
0	4	0

Figuur 1: Nogmaals het 3×3-beeld zoals gegeven in vraag 1.

(a) $H_1^1 f$

(b) $H_2^1 f$

Figuur 2: Vul pixelwaarden in conform je antwoorden op onderdeel a van vraag 1.

(a) $H^2 f$

Figuur 3: Vul pixelwaarden in conform je antwoord op onderdeel c van vraag 1.