HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 11 juli 2003. Tijd: 9.00–12.00 uur. Plaats: AUD 5.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 3 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

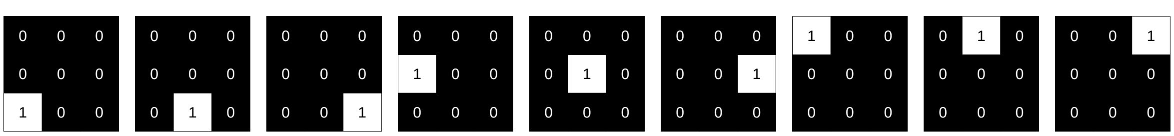
(40) **1.** We definiëren V_N als de lineaire ruimte van alle tweedimensionale digitale beelden bestaande uit $N \times N$ pixels met de gebruikelijke definities voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. De afzonderlijke pixels kunnen willekeurige, reële waarden aannemen.

(5) **a.** Leg met behulp van formules uit wat er bedoeld wordt met "de gebruikelijke definities voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging" in termen van gewone optelling en vermenigvuldiging van reële getallen. Gebruik hierbij de symbolen $\oplus$ voor de vectoroptelling en $\otimes$ voor de scalairvermenigvuldiging.

Stel $f, g \in V_N$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan $(f \oplus g)[i,j] \stackrel{\text{def}}{=} f[i,j] + g[i,j]$ en $(\lambda \otimes f)[i,j] \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f[i,j]$ voor alle $i, j = 1, \ldots, N$.

(5) **b.** We definiëren de vier 2×2-beelden $e_1, e_2, e_3, e_4 \in V_2$ evenals de negen 3×3-beelden $f_1, \ldots, f_9 \in V_3$ zoals aangegeven in onderstaande figuren. Toon aan dat $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ en $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ bases vormen voor respectievelijk V_2 en V_3.

Van links naar rechts: De beelden e_1, e_2, e_3, respectievelijk e_4.



Van links naar rechts: De beelden $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$, respectievelijk f_9.

Door lineaire combinatie $p \stackrel{\text{def}}{=} a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$ met geschikt gekozen coëfficiënten kun je elk willekeurig beeld $p \in V_2$ realiseren. Dit is eenvoudig in te zien m.b.v. een plaatje: Figuur 1. Op analoge wijze kun je door lineaire combinatie $q \stackrel{\text{def}}{=} b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3 + b_4f_4 + b_5f_5 + b_6f_6 + b_7f_7 + b_8f_8 + b_9f_9$ ieder gegeven beeld $q \in V_3$ verkrijgen: Figuur 2.

a_3	a_4
a_1	a_2

Figuur 1: De lineaire combinatie $p \stackrel{\text{def}}{=} a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$.

b_7	b_8	b_9
b_4	b_5	b_6
b_1	b_2	b_3

Figuur 2: De lineaire combinatie $q \stackrel{\text{def}}{=} b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3 + b_4f_4 + b_5f_5 + b_6f_6 + b_7f_7 + b_8f_8 + b_9f_9$.

We introduceren voorts de standaard inprodukten op V_2, respectievelijk V_3: Als $f, g \in V_N$ dan

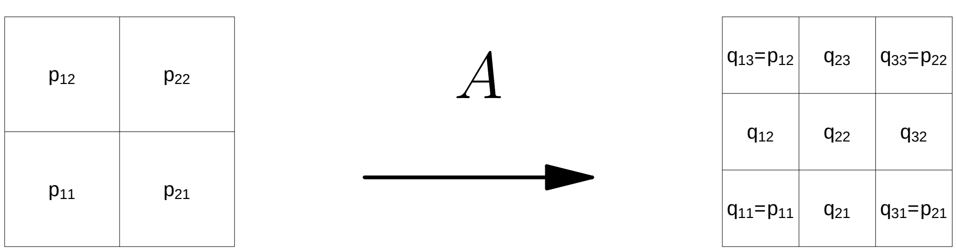
$$\langle f|g\rangle_N = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} f_{kl}\, g_{kl} \qquad (\text{met } N = 2 \text{ resp. } N = 3)\,.$$

(5) **c.** Beargumenteer dat hiermee de bases $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$ uit onderdeel **b** orthonormaal zijn.

Voor twee basisvectoren e_i, e_j in $\mathcal{E}$ geldt $\langle e_i|e_j\rangle_2 = \delta_{ij}$ voor alle $i, j = 1, 2$. Immers, waar e_i een pixelwaarde 1 heeft staat bij e_j, $j \neq i$, een 0. Evenzo geldt voor twee basisvectoren f_i, f_j in $\mathcal{F}$ dat $\langle f_i|f_j\rangle_3 = \delta_{ij}$ voor alle $i, j = 1, 2, 3$.

d. We gaan nu uitgaande van een willekeurig beeld $p \in V_2$ een beeld $q \in V_3$ maken. Daartoe definiëren we de afbeelding $A : V_2 \longrightarrow V_3 : p \mapsto q = A(p)$ in twee stappen als volgt (zie figuur):

1. De zogenaamde *hoekpixels* van q worden identiek overgenomen van de overeenkomstige pixels van p: $q_{11} = p_{11}$, $q_{13} = p_{12}$, $q_{31} = p_{21}$ en $q_{33} = p_{22}$.
2. Een pixel in de tussengevoegde rij of kolom van q wordt bepaald als gemiddelde van al zijn aldus gedefiniëerde, *aangrenzende* hoekpixels, "aangrenzend" in de zin van het 8-*neighbourhood* criterium zoals gedefinieerd in het dictaat, §1.5.2.



De afbeelding $A : V_2 \longrightarrow V_3$. Stap 1 van de definitie is reeds aangegeven.

(5) **d1.** Geef de formules voor alle (ontbrekende) q_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, in termen van p_{kl}, $k, l = 1, 2$.

Voor de randpixels in tussengevoegde rijen/kolommen hebben we $q_{12} = (q_{11}+q_{13})/2 = (p_{11}+p_{12})/2$, $q_{21} = (q_{11}+q_{31})/2 = (p_{11}+p_{21})/2$, $q_{23} = (q_{13}+q_{33})/2 = (p_{12}+p_{22})/2$, $q_{32} = (q_{31}+q_{33})/2 = (p_{21}+p_{22})/2$. Voor het centrale pixel geldt $q_{22} = (q_{11}+q_{13}+q_{31}+q_{33})/4 = (p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22})/4$.

(5) **d2.** Laat zien dat de definitie van het centrale pixel q_{22} in stap 2 hierboven equivalent is met die waarbij we "alle aangrenzende *hoekpixels*" vervangen door "alle aangrenzende pixels" en dat het daarbij niet uitmaakt of we het "8-*neighbourhood*" criterium hanteren dan wel het "4-*neighbourhood*" of het "*diagonal-neighbourhood*" criterium.

Als we de definitie voor het centrale pixel vervangen door $q_{22} = (q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{21}+q_{23}+q_{31}+q_{32}+q_{33})/8$ (gemiddelde van alle aangrenzende pixels volgens het 8-neighbourhood criterium) krijgen we na substitutie van de in onderdeel d1 gevonden waarden: $q_{22} = (p_{11} + (p_{11}+p_{12})/2 + p_{12} + (p_{11}+p_{21})/2 + (p_{12}+p_{22})/2 + p_{21} + (p_{21}+p_{22})/2 + p_{22})/8$. Maar dit is eveneens $q_{22} = (p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22})/4$. Als we het 4-neighbourhood criterium gebruiken wordt de definitie: $q_{22} = (q_{12}+q_{21}+q_{23}+q_{32})/4 = ((p_{11}+p_{12})/2+(p_{11}+p_{21})/2+(p_{12}+p_{22})/2+(p_{21}+p_{22})/2)/4 = (p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22})/4$. Met het diagonal-neighbourhood criterium tenslotte vinden we: $q_{22} = (q_{11}+q_{13}+q_{31}+q_{33})/4 = (p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22})/4$. In alle gevallen vinden we dus hetzelfde resultaat.

(5) **e.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Uit onderdeel d volgt dat elke pixelwaarde van q een lineaire combinatie is van pixelwaarden uit p, dus voor vaste $k,l = 1,2,3$ hebben we $[A(p)]_{kl} = q_{kl} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ijkl}\, p_{ij}$ voor zekere constanten c_{ijkl}, $i,j = 1,2$ (en $k,l = 1,2,3$ vast). Dus $[A(\lambda f+\mu g)]_{kl} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{ijkl}\,(\lambda f+\mu g)_{ij} = \lambda \sum_{i,j=1}^{2} c_{ijkl}\, f_{ij} + \mu \sum_{i,j=1}^{2} c_{ijkl}\, g_{ij} = \lambda\,[A(f)]_{kl} + \mu\,[A(g)]_{kl}$. Omdat dit geldt voor elke $k,l = 1,2,3$ volgt dat $A(\lambda f+\mu g) = \lambda A(f) + \mu A(g)$.

(5) **f.** Bepaal de matrix $\mathbf{A}$ behorende bij de afbeelding A ten opzichte van de bases $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$. D.w.z. als $p = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$ en $q = A(p) = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5 + \beta_6 f_6 + \beta_7 f_7 + \beta_8 f_8 + \beta_9 f_9$, bepaal dan de matrix die de coördinatenrijtjes van p en q relateert volgens

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

(*Hint:* Gebruik je antwoord uit onderdeel d1.)

In feite ligt het antwoord al besloten in onderdeel d1. We kunnen de volgende identificaties maken: Voor de pixels van beeld p hebben we $\alpha_1 = p_{11}$, $\alpha_2 = p_{21}$, $\alpha_3 = p_{12}$, $\alpha_4 = p_{22}$. Voor die van $q = A(p)$ (zie onderdeel d): $\beta_1 = q_{11} = p_{11} = \alpha_1$, $\beta_2 = q_{21} = (q_{11}+q_{31})/2 = (p_{11}+p_{21})/2 = (\alpha_1+\alpha_2)/2$, $\beta_3 = q_{31} = p_{21} = \alpha_2$, $\beta_4 = q_{12} = (q_{11}+q_{13})/2 = (p_{11}+p_{12})/2 = (\alpha_1+\alpha_3)/2$, $\beta_5 = q_{22} = (p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22})/4 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)/4$, $\beta_6 = q_{32} = (q_{31}+q_{33})/2 = (p_{21}+p_{22})/2 = (\alpha_2+\alpha_4)/2$, $\beta_7 = q_{13} = p_{12} = \alpha_3$, $\beta_8 = q_{23} = (q_{13}+q_{33})/2 = (p_{12}+p_{22})/2 = (\alpha_3+\alpha_4)/2$, $\beta_9 = q_{33} = p_{22} = \alpha_4$. De matrix $\mathbf{A}$, uiteraard een 9×4-matrix, heeft dus de volgende gedaante:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) **g.** Zij $A(V_2) \subset V_3$ de lineaire deelruimte van V_3 bestaande uit alle beelden van de vorm $q = A(p)$ voor een of andere $p \in V_2$. Wat is de dimensie van $A(V_2)$? M.a.w., hoeveel onafhankelijke vectoren heb je nodig om een willekeurig beeld van de vorm $q = A(p) \in V_3$ te beschrijven?

Elke $q = A(p) \in A(V_2)$ is volledig bepaald in termen van de pixels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ van zijn origineel. Je hebt dus zeker niet meer dan vier coëfficiënten nodig voor de specificatie van een willekeurige q, dus $\dim A(V_2) \leq 4$ (i.h.a. geldt dat de dimensie van de beeldruimte onder een lineaire afbeelding nooit groter kan zijn dan die van het domein). Er geldt echter ook dat $\dim A(V_2) \geq 4$, hetgeen je o.a. kunt zien aan de vorm van $\beta_1 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2, \beta_7 = \alpha_3, \beta_9 = \alpha_4$. Dus $\dim A(V_2) = 4$. Je ziet dit overigens ook aan de matrix $\mathbf{A}$: $\dim A(V_2) = \operatorname{rank} \mathbf{A} = 4$.

(*40*) **2.** We beschouwen in deze opgave de verzameling V van alle beelden $f : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy < \infty \, .$$

We voorzien deze verzameling van een optelling en scalairvermenigvuldiging als volgt: Als $f, g \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan definiëren we $(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$ en $(\lambda f)(x,y) = \lambda f(x,y)$.

a. Toon aan dat V een lineaire ruimte is door achtereenvolgens te bewijzen dat

($2\frac{1}{2}$) **a1.** als $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan $\lambda f \in V$, respectievelijk

($2\frac{1}{2}$) **a2.** als $f, g \in V$, dan $f + g \in V$.
(*Hint:* Cauchy-Schwartz.)

Stel $f, g \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig. We moeten laten zien dat de som $f + g$ en het scalaire veelvoud λf voldoen aan het convergentiecriterium, opdat deze wederom corresponderen met beelden in V. Voor het scalaire veelvoud volgt eenvoudig

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f(x,y))^2 \, dxdy = \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy < \infty \, .$$

Voor de som hebben we

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x,y) + g(x,y)^2 \, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \, g(x,y) \, dxdy + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x,y)^2 \, dxdy \, .$$

Eerste en laatste term zijn per definitie eindig (want $f, g \in V$). Voor het dubbele produkt kunnen we de volgende afschatting maken m.b.v. Cauchy-Schwartz:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \, g(x,y) \, dxdy \right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x,y)^2 \, dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \, .$$

b. We voorzien de lineaire ruimte V van een afstandsmaat—in het dictaat "distance" genaamd—door voor elk tweetal beelden $f, g \in V$ de onderlinge afstand $d(f, g) \geq 0$ te definiëren als

$$d(f,g) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x,y) - g(x,y))^2 \, dxdy} \,.$$

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Laat zien dat voor $f, g \in V$ de onderlinge afstand $d(f, g)$ altijd eindig is. (*Hint:* Gebruik onderdeel **a**.)

Beschouw voor het gemak

$$d(f,g)^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x,y) - g(x,y))^2 \, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy - 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\, g(x,y) \, dxdy + \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x,y)^2 \, dxdy \,.$$

We hebben in onderdeel **a** al beredeneerd dat alle termen hierin eindig zijn. Alternatieve formulering: Aangezien V een vectorruimte is (onderdeel **a**), geldt dat als $f, g \in V$ ook $f - g = f + (-g) \in V$. Maar dit betekent precies, volgens de definitie van V, dat $(d(f,g))^2 < \infty$, dus is $d(f, g)$ eindig.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Beschouw het hypothetische beeld $f_0 : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven als volgt:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en de nulfunctie $o \in V$ gegeven door $o(x, y) = 0$ voor alle $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Bepaal $d(f_0, o)$.

Invullen in de definitie levert

$$d(f_0, o) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x,y) - o(x,y))^2 \, dxdy} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2 \, dxdy} = 0 \,,$$

aangezien $f(x, y)$ overal, op een enkel geïsoleerd punt na, nul is: De waarde van een functie in één punt is irrelevant!

(5) **b3.** Concludeer hieruit dat de afstandsmaat d formeel gesproken géén afstand definiëert. (*Hint:* Er zijn drie criteria waaraan een afstand moet voldoen.)

Eén van de criteria luidt dat als $d(f, g) = 0$ voor twee functies $f, g \in V$, noodzakelijkerwijs moet volgen dat $f = g$. Dat is hier echter niet het geval voor f en o, want o is de nulfunctie en f niet.

($2\frac{1}{2}$) **b4.** Als $f, g \in V$ voldoen aan $d(f, g) = 0$, wat kun je dan zeggen over de verschilfunctie $f - g$?

Stel $v = f - g$ met $d(f, g) = 0$. Dan geldt dus

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,y)^2 \, dxdy = 0 \,.$$

Dat wil zeggen, de verschilfunctie heeft L_2-norm gelijk aan nul. De functie v hoeft, zoals blijkt, echter niet de nulfunctie te zijn, maar mag hiervan verschillen "op een set van maat nul", d.w.z. op iedere deelverzameling van het domein die geen bijdrage levert aan bovenstaande integraal. Een eenvoudig voorbeeld hiervan hebben we hierboven gezien.

c. We introduceren verder de volgende functies in V:

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= \sin y \\ f_2(x,y) &= \cos x\, \sin y \\ f_3(x,y) &= \cos 2x\, \sin y \\ f_4(x,y) &= \cos^2 x\, \sin y \end{cases}$$

(5) **c1.** Toon aan dat f_4 lineair afhankelijk is van f_1, f_2 en f_3, d.w.z. laat zien dat er niet-triviale coëfficiënten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bestaan zodanig dat $f_4 = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$.
(*Hint:* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.)

De hint levert ons $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, dus $f_4 = \cos^2 x \, \sin y = \frac{1}{2}\sin y + \frac{1}{2}\cos 2x\, \sin y = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_3$.

(5) **c2.** We voorzien V van een inprodukt op de voor de hand liggende manier: Als $f, g \in V$, dan

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\, g(x,y)\, dxdy\,.$$

Laat zien dat hiermee $\{f_1, f_2, f_3\}$ een orthogonale set vormt.

Orthogonaliteit wil zeggen dat $\langle f_i|f_j\rangle = 0$ voor elke $i, j = 1, 2, 3$ met $i \neq j$. Vanwege symmetrie van het inprodukt hoeven we enkel te kijken naar de volgende integralen:

$$\begin{aligned} \langle f_1|f_2\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, \cos x\, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, dy\,, \\ \langle f_1|f_3\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, \cos 2x\, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\, dx \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, dy\,, \\ \langle f_2|f_3\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, \cos x\, \cos 2x\, dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, \cos 2x\, dx \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 y\, dy\,. \end{aligned}$$

Alle x-integralen zijn nul vanwege het feit dat de integrand een 2π-periodieke functie is met gemiddelde nul. In het laatste geval zie je dat het eenvoudigst door $\cos x\, \cos 2x$ m.b.v. de eerder gegeven hint te herschrijven als $2\cos^3 x - \cos x$.

d. Het opspansel van f_1, f_2 en f_3 vormt een lineaire deelruimte $W \subset V$. Een functie $u \in W$ kan dus per definitie geschreven worden als lineaire combinatie van f_1, f_2 en f_3. We definiëren nu de afbeelding $A : W \longrightarrow W : u \mapsto A(u)$ als volgt: Als $u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, dan

$$A(u) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} f_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} f_2 + \alpha_3 f_3\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

Stel $u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ en $v = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3$ zijn twee willekeurige beelden in het opspansel van f_1, f_2 en f_3 en λ en μ twee willekeurige getallen. Dan is $\lambda\, u + \mu\, v = \lambda\, (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3) + \mu\, (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3) = (\lambda\,\alpha_1 + \mu\,\beta_1) f_1 + (\lambda\,\alpha_2 + \mu\,\beta_2) f_2 + (\lambda\,\alpha_3 + \mu\,\beta_3) f_3$. Schrijf voor de eenvoud even $a_1 = \lambda\,\alpha_1 + \mu\,\beta_1$, $a_2 = \lambda\,\alpha_2 + \mu\,\beta_2$ en $a_3 = \lambda\,\alpha_3 + \mu\,\beta_3$, dan is dus per definitie $\lambda\, u + \mu\, v = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$, dus

$$A(\lambda\, u + \mu\, v) = \frac{a_1 + a_2}{2} f_1 + \frac{a_1 + a_2}{2} f_2 + a_3 f_3 = \frac{\lambda\,\alpha_1 + \mu\,\beta_1 + \lambda\,\alpha_2 + \mu\,\beta_2}{2} f_1 + \frac{\lambda\,\alpha_1 + \mu\,\beta_1 + \lambda\,\alpha_2 + \mu\,\beta_2}{2} f_2 + (\lambda\,\alpha_3 + \mu\,\beta_3) f_3\,.$$

De λ en μ factoren in het rechterlid scheiden leidt tot

$$A(\lambda\, u + \mu\, v) = \lambda\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} f_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} f_2 + \alpha_3 f_3\right) + \mu\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2} f_1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} f_2 + \beta_3 f_3\right) = \lambda\, A(u) + \mu\, A(v)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Toon aan dat A een projectie is.

Stel $u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, dan is

$$A^2(u) = A(A(u)) = A\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_2 + \alpha_3 f_3\right) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} A(f_1) + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} A(f_2) + \alpha_3 A(f_3)\,.$$

De laatste stap volgt middels lineariteit van A (onderdeel d1). Door in de definitie van A achtereenvolgens $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ in te vullen zie je dat $A(f_1) = A(f_2) = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$, $A(f_3) = f_3$. Invullen in voorgaand resultaat levert tenslotte

$$A^2(u) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right) + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right) + \alpha_3 f_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_2 + \alpha_3 f_3 = A(u)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d3.** Vind een functie $g \in W$, niet de nulfunctie, waarvoor geldt $A(g) = 0$. (D.w.z. g is een eigenfunctie van A bij eigenwaarde 0.)

Kies $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ met $\alpha_1 = -\alpha_2 \neq 0$ willekeurig en $\alpha_3 = 0$.

($2\frac{1}{2}$) **d4.** Vind een functie $h \in W$, niet de nulfunctie, waarvoor geldt $A(h) = h$. (D.w.z. h is een eigenfunctie van A bij eigenwaarde 1.)

Kies bijvoorbeeld $h = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ met $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ en $\alpha_3 \neq 0$ willekeurig. Alternatief: $\alpha_1 = \alpha_2 \neq 0$ en α_3 willekeurig.

($2\frac{1}{2}$) **e.** Bewijs dat A geen andere eigenwaarden dan 0 en 1 heeft, d.w.z. als $A(f) = \lambda f$ voor zekere eigenfunctie $f \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan volgt noodzakelijkerwijs dat $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.
(*Hint:* Je hebt hiervoor slechts nodig dat A een projectie-afbeelding is!)

Als f een eigenfunctie is bij eigenwaarde λ, dus als $A(f) = \lambda f$, dan is $A^2(f) = A(\lambda f) = \lambda A(f) = \lambda^2 f$ vanwege lineariteit. De hint volgend kunnen echter ook opmerken dat $A^2(f) = A(f) = \lambda f$. Klaarblijkelijk geldt $\lambda^2 f = \lambda f$. Omdat f niet de nulvector is moet dus gelden $\lambda^2 = \lambda$ oftewel $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.

(*20*) **3.** Beschouw de volgende partiële differentiaalvergelijking (p.d.v.):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$$

Hierin is $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ een reëelwaardig spatieel filter voor elke constante waarde van de parameter $t \in \mathbb{R}^+$.

(5) **a.** Beschouw, voor vaste t, de Fourierdecompositie

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega \qquad \text{en dus} \qquad \widehat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx\,.$$

Laat zien dat hiermee bovenstaande p.d.v. voor $u(x,t)$ herleid kan worden tot de volgende gewone differentiaalvergelijking voor $\widehat{u}(\omega,t)$, waarin $\omega \in \mathbb{R}$ als een willekeurige parameter opgevat kan worden:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} - \omega^2\,\widehat{u} = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$$

Substitutie van $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega$ in de p.d.v. levert, na verwisseling van de differentiaal- en integraaloperatoren,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2}(\omega,t) - \omega^2\, \widehat{u}(\omega,t)\right] e^{i\omega x}\, d\omega = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R},\, t > 0\,.$$

Het deel tussen vierkante haken in het linkerlid is dus de Fouriergetransformeerde van de nulfunctie (rechterlid), dus zelf de nulfunctie. N.B.: I.p.v. "rechte d" mag je ook "kromme ∂" schrijven. Merk op dat de variabele ω hier als een constante parameter beschouwd kan worden (er wordt niet naar ω gedifferentieerd), zodat we feitelijk met een gewone tweede orde differentiaalvergelijking te doen hebben.

(5) **b.** Toon aan dat de algemene oplossing voor $\widehat{u}(\omega,t)$ gegeven wordt door

$$\widehat{u}(\omega,t) = A\, e^{-t|\omega|} + B\, e^{t|\omega|}\,.$$

Hierin zijn A en B twee nader te bepalen integratieconstanten. (Hint: Postuleer een oplossing van het type $\widehat{u}(t) = e^{\lambda t}$ en bepaal de mogelijke waarden van $\lambda \in \mathbb{C}$ in termen van ω.)

Poneer een oplossing van het type $\widehat{u}(t) = e^{\lambda t}$ (de parameter ω is in de notatie gemakshalve weggelaten). Invullen levert $\lambda = \pm\omega$, zodat de algemene oplossing een lineaire combinatie is van de vorm $\widehat{u}(\omega,t) = a\, e^{-t\omega} + b\, e^{t\omega}$. Subtiliteit: Hierin staan dus géén modulus-strepen! Om de volgende reden mogen we echter toch modulus-strepen introduceren: De integratieconstanten a, b hangen i.h.a. af van de parameter ω. Om tot de gegeven uitdrukking te komen herparametriseren we deze constanten als volgt: Als $\omega \geq 0$ zetten we $(A,B) = (a,b)$, en als $\omega < 0$ nemen we $(A,B) = (b,a)$. Dit leidt tot de gegeven uitdrukking.

c. Bepaal de constanten A en B aan de hand van de volgende veronderstellingen:

($2\frac{1}{2}$) **c1.** $\lim_{t\to\infty} \widehat{u}(\omega,t) = 0$ voor alle $\omega \neq 0$.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = 1$ voor alle $t > 0$. (Hint: Wat betekent deze normering voor $\widehat{u}(\omega,t)$?)

De limiet $\lim_{t\to\infty} \widehat{u}(\omega,t)$ "explodeert" voor $\omega \neq 0$ tenzij $B = 0$. Als $B = 0$ krijg je de gewenste limietwaarde, aangezien $\lim_{t\to\infty} A\, e^{-t|\omega|} = 0$. Verder is $1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, dx = \widehat{u}(0,t) = A + B = A$. Dus $(A,B) = (1,0)$, onafhankelijk van ω.

(5) **d.** Neem $(A,B) = (1,0)$, dus $\widehat{u}(\omega,t) = e^{-t|\omega|}$. Bepaal $u(x,t)$.

Inverse Fouriertransformatie van $\widehat{u}(\omega,t) = e^{-t|\omega|}$ levert $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, e^{-t|\omega|}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(t+ix)\omega}\, d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{(-t+ix)\omega}\, d\omega =$ $\frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{t+ix}\, e^{(t+ix)\omega}\right]_{\omega\to-\infty}^{\omega=0} + \left[\frac{1}{-t+ix}\, e^{(-t+ix)\omega}\right]_{\omega=0}^{\omega\to\infty}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{t+ix} - \frac{1}{-t+ix}\right\} = \frac{t}{\pi}\, \frac{1}{x^2+t^2}\,.$

EINDE