HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 11 juli 2003. Tijd: 9.00–12.00 uur. Plaats: AUD 5.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 3 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

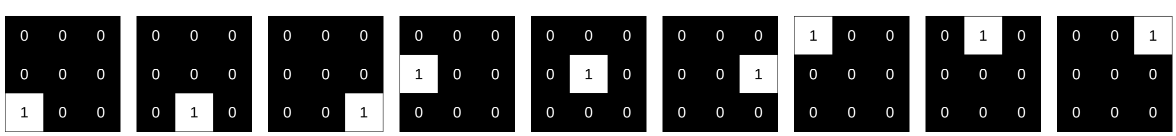
VEEL SUCCES!

(40) **1.** We definiëren V_N als de lineaire ruimte van alle tweedimensionale digitale beelden bestaande uit $N \times N$ pixels met de gebruikelijke definities voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. De afzonderlijke pixels kunnen willekeurige, reëele waarden aannemen.

(5) **a.** Leg met behulp van formules uit wat er bedoeld wordt met "de gebruikelijke definities voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging" in termen van gewone optelling en vermenigvuldiging van reëele getallen. Gebruik hierbij de symbolen $\oplus$ voor de vectoroptelling en $\otimes$ voor de scalairvermenigvuldiging.

(5) **b.** We definiëren de vier 2×2-beelden $e_1, e_2, e_3, e_4 \in V_2$ evenals de negen 3×3-beelden $f_1, \ldots, f_9 \in V_3$ zoals aangegeven in onderstaande figuren. Toon aan dat $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ en $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ bases vormen voor respectievelijk V_2 en V_3.

Van links naar rechts: De beelden e_1, e_2, e_3, respectievelijk e_4.



Van links naar rechts: De beelden $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$, respectievelijk f_9.

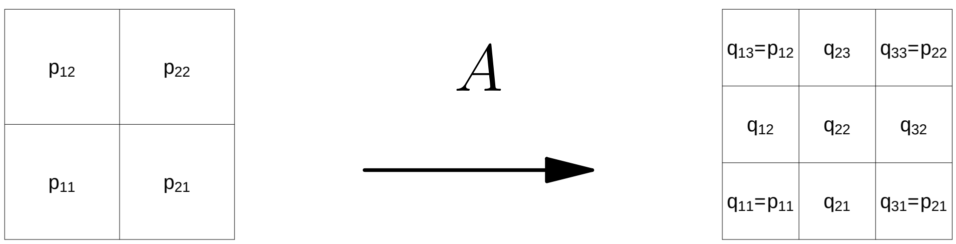
We introduceren voorts de standaard inprodukten op V_2, respectievelijk V_3: Als $f, g \in V_N$ dan

$$\langle f|g\rangle_N = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} f_{kl}\, g_{kl} \qquad (\text{met } N = 2 \text{ resp. } N = 3)\,.$$

(5) **c.** Beargumenteer dat hiermee de bases $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$ uit onderdeel **b** orthonormaal zijn.

d. We gaan nu uitgaande van een willekeurig beeld $p \in V_2$ een beeld $q \in V_3$ maken. Daartoe definiëren we de afbeelding $A : V_2 \longrightarrow V_3 : p \mapsto q = A(p)$ in twee stappen als volgt (zie figuur):

1. De zogenaamde *hoekpixels* van q worden identiek overgenomen van de overeenkomstige pixels van p: $q_{11} = p_{11}$, $q_{13} = p_{12}$, $q_{31} = p_{21}$ en $q_{33} = p_{22}$.
2. Een pixel in de tussengevoegde rij of kolom van q wordt bepaald als gemiddelde van al zijn aldus gedefiniëerde, *aangrenzende* hoekpixels, "aangrenzend" in de zin van het 8-*neighbourhood* criterium zoals gedefinieerd in het dictaat, §1.5.2.



De afbeelding $A : V_2 \longrightarrow V_3$. Stap 1 van de definitie is reeds aangegeven.

(5) **d1.** Geef de formules voor alle (ontbrekende) q_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, in termen van p_{kl}, $k, l = 1, 2$.

(5) **d2.** Laat zien dat de definitie van het centrale pixel q_{22} in stap 2 hierboven equivalent is met die waarbij we "alle aangrenzende *hoekpixels*" vervangen door "alle aangrenzende pixels" en dat het daarbij niet uitmaakt of we het "8-*neighbourhood*" criterium hanteren dan wel het "4-*neighbourhood*" of het "*diagonal-neighbourhood*" criterium.

(5) **e.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

(5) **f.** Bepaal de matrix $\mathbf{A}$ behorende bij de afbeelding A ten opzichte van de bases $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$. D.w.z. als $p = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$ en $q = A(p) = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4 + \beta_5 f_5 + \beta_6 f_6 + \beta_7 f_7 + \beta_8 f_8 + \beta_9 f_9$, bepaal dan de matrix die de coördinatenrijtjes van p en q relateert volgens

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

(*Hint:* Gebruik je antwoord uit onderdeel d1.)

(5) **g.** Zij $A(V_2) \subset V_3$ de lineaire deelruimte van V_3 bestaande uit alle beelden van de vorm $q = A(p)$ voor een of andere $p \in V_2$. Wat is de dimensie van $A(V_2)$? M.a.w., hoeveel onafhankelijke vectoren heb je nodig om een willekeurig beeld van de vorm $q = A(p) \in V_3$ te beschrijven?

(40) **2.** We beschouwen in deze opgave de verzameling V van alle beelden $f : [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)^2\,dxdy < \infty\,.$$

We voorzien deze verzameling van een optelling en scalairvermenigvuldiging als volgt: Als $f,g \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan definiëren we $(f+g)(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$ en $(\lambda\,f)(x,y) = \lambda\,f(x,y)$.

a. Toon aan dat V een lineaire ruimte is door achtereenvolgens te bewijzen dat

($2\frac{1}{2}$) **a1.** als $f \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan $\lambda\,f \in V$, respectievelijk

($2\frac{1}{2}$) **a2.** als $f,g \in V$, dan $f+g \in V$.
(*Hint:* Cauchy-Schwartz.)

b. We voorzien de lineaire ruimte V van een afstandsmaat—in het dictaat "distance" genaamd—door voor elk tweetal beelden $f,g \in V$ de onderlinge afstand $d(f,g) \geq 0$ te definiëren als

$$d(f,g) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x,y)-g(x,y)\right)^2\,dxdy}\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Laat zien dat voor $f,g \in V$ de onderlinge afstand $d(f,g)$ altijd eindig is.
(*Hint:* Gebruik onderdeel **a**.)

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Beschouw het hypothetische beeld $f_0 : [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven als volgt:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{als } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{als } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en de nulfunctie $o \in V$ gegeven door $o(x,y) = 0$ voor alle $(x,y) \in [-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$. Bepaal $d(f_0,o)$.

(5) **b3.** Concludeer hieruit dat de afstandsmaat d formeel gesproken géén afstand definiëert.
(*Hint:* Er zijn drie criteria waaraan een afstand moet voldoen.)

($2\frac{1}{2}$) **b4.** Als $f,g \in V$ voldoen aan $d(f,g) = 0$, wat kun je dan zeggen over de verschilfunctie $f-g$?

c. We introduceren verder de volgende functies in V:

$$\begin{cases} f_1(x,y) &= \sin y \\ f_2(x,y) &= \cos x\,\sin y \\ f_3(x,y) &= \cos 2x\,\sin y \\ f_4(x,y) &= \cos^2 x\,\sin y \end{cases}$$

(5) **c1.** Toon aan dat f_4 lineair afhankelijk is van f_1, f_2 en f_3, d.w.z. laat zien dat er niet-triviale coëfficiënten $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ bestaan zodanig dat $f_4 = \alpha_1\,f_1 + \alpha_2\,f_2 + \alpha_3\,f_3$.
(*Hint:* $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.)

(5) **c2.** We voorzien V van een inprodukt op de voor de hand liggende manier: Als $f, g \in V$, dan

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\, g(x,y)\, dxdy\,.$$

Laat zien dat hiermee $\{f_1, f_2, f_3\}$ een orthogonale set vormt.

d. Het opspansel van f_1, f_2 en f_3 vormt een lineaire deelruimte $W \subset V$. Een functie $u \in W$ kan dus per definitie geschreven worden als lineaire combinatie van f_1, f_2 en f_3. We definiëren nu de afbeelding $A : W \longrightarrow W : u \mapsto A(u)$ als volgt: Als $u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, dan

$$A(u) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_1 + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} f_2 + \alpha_3 f_3\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Toon aan dat A een projectie is.

($2\frac{1}{2}$) **d3.** Vind een functie $g \in W$, niet de nulfunctie, waarvoor geldt $A(g) = 0$. (D.w.z. g is een eigenfunctie van A bij eigenwaarde 0.)

($2\frac{1}{2}$) **d4.** Vind een functie $h \in W$, niet de nulfunctie, waarvoor geldt $A(h) = h$. (D.w.z. h is een eigenfunctie van A bij eigenwaarde 1.)

($2\frac{1}{2}$) **e.** Bewijs dat A geen andere eigenwaarden dan 0 en 1 heeft, d.w.z. als $A(f) = \lambda f$ voor zekere eigenfunctie $f \in W$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan volgt noodzakelijkerwijs dat $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.
(*Hint:* Je hebt hiervoor slechts nodig dat A een projectie-afbeelding is!)

(*20*) **3.** Beschouw de volgende partiële differentiaalvergelijking (p.d.v.):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$$

Hierin is $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t)$ een reëelwaardig spatieel filter voor elke constante waarde van de parameter $t \in \mathbb{R}^+$.

(5) **a.** Beschouw, voor vaste t, de Fourierdecompositie

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega \qquad \text{en dus} \qquad \widehat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx\,.$$

Laat zien dat hiermee bovenstaande p.d.v. voor $u(x,t)$ herleid kan worden tot de volgende gewone differentiaalvergelijking voor $\widehat{u}(\omega,t)$, waarin $\omega \in \mathbb{R}$ als een willekeurige parameter opgevat kan worden:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} - \omega^2\, \widehat{u} = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R},\ t > 0\,.$$

(5) **b.** Toon aan dat de algemene oplossing voor $\widehat{u}(\omega,t)$ gegeven wordt door

$$\widehat{u}(\omega, t) = A\, e^{-t|\omega|} + B\, e^{t|\omega|}\,.$$

Hierin zijn A en B twee nader te bepalen integratieconstanten. (Hint: Postuleer een oplossing van het type $\widehat{u}(t) = e^{\lambda t}$ en bepaal de mogelijke waarden van $\lambda \in \mathbb{C}$ in termen van ω.)

c. Bepaal de constanten A en B aan de hand van de volgende veronderstellingen:

($2\frac{1}{2}$) **c1.** $\lim_{t\to\infty} \widehat{u}(\omega, t) = 0$ voor alle $\omega \neq 0$.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, dx = 1$ voor alle $t > 0$. (Hint: Wat betekent deze normering voor $\widehat{u}(\omega, t)$?)

(5) **d.** Neem $(A, B) = (1, 0)$, dus $\widehat{u}(\omega, t) = e^{-t|\omega|}$. Bepaal $u(x, t)$.

EINDE