HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: vrijdag 13 juni 2008. Tijd: 09:00-12:00.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van collegedictaat en calculator is toegestaan. Het gebruik van de opgaven- en tentamenbundel is *niet* toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** We bekijken een open interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (niet leeg) en voorzien deze van een infix operator $\oplus : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \oplus y$, gegeven door het volgende voorschrift:

$$x \oplus y = \frac{x+y}{1+\lambda\, x\, y}\,.$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ een gegeven constante. De verzameling $\mathbb{I}$, voorzien van de operator $\oplus$, duiden we aan met $\{\mathbb{I}, \oplus\}$. (In plaats van $x \in \{\mathbb{I}, \oplus\}$ schrijven we ook kortheidshalve $x \in \mathbb{I}$.)

We gaan er in het volgende onderdeel van uit dat $\lambda = 0$.

(5) **a.** Hoe moeten we het interval $\mathbb{I}$ kiezen opdat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een groep vormt? Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een commutatieve groep vormt voor jouw keuze van $\mathbb{I}$.

Stel $\mathbb{I} = (c_1, c_2)$ voor zekere $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $c_1 < c_2$. Omdat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een groep is onder gewone optelling moet gelden $0 \in \mathbb{I}$ (eenheidselement oftewel neutraal element). Dus volgt $c_1 < 0$, $c_2 > 0$. Om dezelfde reden moet gelden dat als $x \in \mathbb{I}$, dan ook $\pm(x \oplus x) = \pm(x + x) = \pm 2x \in \mathbb{I}$, en zo door redenerend $k\, x \in \mathbb{I}$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Als c_1 of c_2 eindig is bestaat er uiteraard een $k \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $k\, x \notin (c_1, c_2)$. Dus kan c_1 noch c_2 eindig zijn. Ergo: $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. Met deze keuze is de optelling een gesloten operator.

Stelling: $\{\mathbb{R}, +\}$ is een commutatieve groep. Bewijs: Kies $x, y, z \in \{\mathbb{R}, +\}$ willekeurig. Dan geldt trivialiter:

- associativiteit: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- eenheidselement $e = 0$, immers $0 + x = x + 0 = x$;
- inverse element $x^{\rm inv} = -x$, immers $(-x) + x = x + (-x) = 0$;
- commutativiteit: $x + y = y + x$.

In alle volgende onderdelen gaan we ervan uit dat $\lambda > 0$.

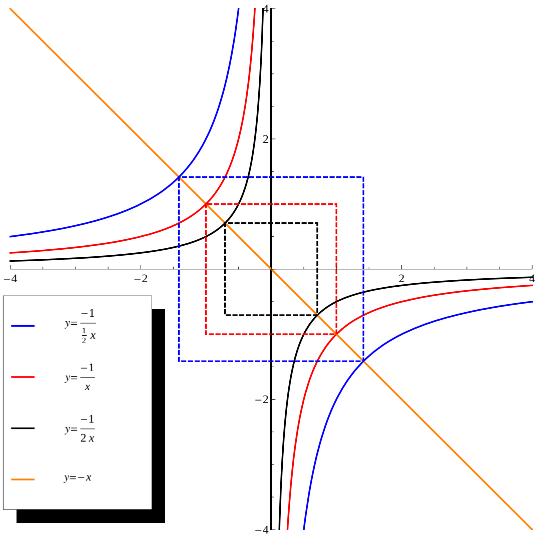
(5) **b.** Schets in één (x, y)-vlak de grafieken van de verzamelingen $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 + \lambda\, x\, y = 0\right\}$ en

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$ en geef de exacte coördinaten van de snijpunten. Gebruik de bijlage.

De snijpunten volgen door $y = -x$ te substitueren in $1 + \lambda\, x\, y = 0$. Dit levert $x^2 = \frac{1}{\lambda}$, dus $x = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, met bijbehorende y-coordinaat $y = \mp\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$. Conclusie:

$$(x, y) \in \left\{ \left(-\sqrt{\frac{1}{\lambda}}, \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \right), \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}, -\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \right) \right\}.$$

De grafieken voor $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2$ zijn hieronder geschetst, tezamen met de bijbehorende definitiegebieden van de groepsoperator $\oplus$.



(5) **c.** Stel $\mathbb{I} = (-a, a)$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$. Laat zien dat de grootste waarde van a waarvoor $1 + \lambda\, x\, y \neq 0$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ gegeven wordt door $a = 1/\sqrt{\lambda}$.

De waarde van a volgt rechtstreeks uit de grafiek bij onderdeel b. Het toegestane domein van de groepsoperator $\oplus$ is hierin weergegeven als het vierkant dat bepaald wordt door de snijpunten die bij onderdeel b berekend zijn. Gebruik makend van de berekende hoekpuntcoördinaten vinden we $a = 1/\sqrt{\lambda}$. Merk op dat een deel van het antwoord op onderdeel a besloten ligt in dit resultaat: door de limiet $\lambda \to 0$ te beschouwen volgt $a \to \infty$, dus $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ (in onderdeel a).

(5) **d.** Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ gesloten is onder de operatie $\oplus$ voor $\mathbb{I} = (-1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})$.
(*Hint:* Onderzoek eerst $f_y(x) = x \oplus y$ voor vaste, willekeurig gekozen $y \in \mathbb{I}$ en bepaal vervolgens suprema en infima voor $x \oplus y$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.)

Het hieronder geschetste bewijs verloopt in twee stappen. Stap 1: Onderzoek het gedrag van de functie $f_y(x) = x \oplus y$ voor vast gekozen $y \in \mathbb{I}$ en bepaal het supremum en infimum over $x \in \mathbb{I}$ als functie van $y \in \mathbb{I}$. Stap 2: Varieer nu ook de parameter $y \in \mathbb{I}$ en zoek wederom het supremum en infimum, ditmaal over alle $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Stap 1: Stel

$$f_y(x) = \frac{x + y}{1 + \lambda\, x\, y} \quad \text{dan} \quad f_y'(x) = 2\, \frac{1 - \lambda\, y^2}{(1 + \lambda\, x\, y)^2}.$$

Voor elke $y \in \mathbb{I}$ geldt $f_y'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{I}$, dus is $f_y(x)$ strict monotoon stijgend als functie van $x \in \mathbb{I}$ voor elke $y \in \mathbb{I}$. Bijgevolg is

$$\sup_{x \in \mathbb{I}} f_y(x) = \lim_{x \uparrow 1/\sqrt{\lambda}} f_y(x) \overset{*}{=} f_y(1/\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

en

$$\inf_{x\in\mathbb{I}} f_y(x) = \lim_{x\downarrow -1/\sqrt{\lambda}} f_y(x) \stackrel{*}{=} f_y(-1/\sqrt{\lambda}) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

De door $*$ gemarkeerde gelijkheid volgt uit continuïteitsoverweging.

Stap 2: Aangezien supremum en infimum kennelijk onafhankelijk zijn van $y \in \mathbb{I}$ en de functie $f(x,y) = x \oplus y$ continu is op $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ volgt dat

$$-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \inf_{(x,y)\in\mathbb{I}\times\mathbb{I}} x \oplus y \leq x \oplus y \leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{I}\times\mathbb{I}} x \oplus y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,,$$

m.a.w. $x \oplus y \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$. De set $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ is dus gesloten onder de operatie $\oplus$.

(5) **e.** Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een commutatieve groep vormt voor $\mathbb{I} = (-1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})$.

Associativiteit:

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{x + (y \oplus z)}{1 + \lambda\, x\, (y \oplus z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+\lambda\, y\, z}}{1 + \lambda\, x\, \frac{y+z}{1+\lambda\, y\, z}} = \frac{x + y + z + \lambda\, x\, y\, z}{1 + \lambda(x\, y + x\, z + y\, z)} = \frac{\frac{x+y}{1+\lambda\, x\, y} + z}{1 + \lambda\, \frac{x+y}{1+\lambda\, x\, y}\, z} = \frac{(x \oplus y) + z}{1 + \lambda\, (x \oplus y)\, z} = (x \oplus y) \oplus z\,.$$

Neutraal element (of eenheidselement):

$$x \oplus 0 = \frac{x + 0}{1 + \lambda\, x\, 0} = x \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{I},$$

dus $0 \in \mathbb{I}$ is het neutrale element. (Op grond van commutativiteit, zie onder, geldt ook $0 \oplus x = x \oplus 0 = x$ voor alle $x \in \mathbb{I}$.)
Tegengestelde (of inverse):

$$x \oplus (-x) = \frac{x + (-x)}{1 + \lambda\, x\, (-x)} = 0 \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{I}.$$

(Op grond van commutativiteit, zie onder, geldt ook $(-x) \oplus x = x \oplus (-x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{I}$.) Commutativiteit:

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + \lambda\, x\, y} \stackrel{*}{=} \frac{y + x}{1 + \lambda\, y\, x} = y \oplus x \quad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{I},$$

aangezien de operator $\oplus$ symmetrisch is (een gevolg van commutativiteit van de gewone optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$, gebruikt in de door $*$ gemarkeerde stap).

♣

(*20*) **2.** We bekijken de verzameling van reëelwaardige 2×2-matrices,

$$\mathbb{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i, j = 1, 2 \right\}\,.$$

Zonder bewijs nemen we aan dat $\mathbb{M}$, voorzien van de gebruikelijke matrixoptelling en reële scalairvermenigvuldiging, een reële lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Geef, m.b.v. (een) formule(s), precies aan wat hier bedoeld wordt met "de gebruikelijke matrixoptelling en reële scalairvermenigvuldiging".

Met "de gebruikelijke matrixoptelling en reële scalairvermenigvuldiging" wordt het volgende bedoeld. Als $A, B \in \mathbb{M}$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dan

$$(\lambda\, A + \mu\, B)_{ij} = \lambda\, A_{ij} + \mu\, B_{ij} \quad (i, j = 1, 2)\,.$$

We voorzien $\mathbb{M}$ van een infix operator $\odot : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M} : (A, B) \mapsto A \odot B$, als volgt:

$$A \odot B = \frac{1}{2}(A\,B + B\,A)\,.$$

In het rechterlid wordt het gebruikelijke matrixprodukt gebruikt. De verzameling $\mathbb{M}$, voorzien van de operator $\odot$, wordt aangeduid als $\{\mathbb{M}, \odot\}$.

($2\frac{1}{2}$) **b.** Geef aan wat hier precies bedoeld wordt met "het gebruikelijke matrixprodukt".

Met de "het gebruikelijke matrixprodukt" wordt het volgende bedoeld. Als $A, B \in \mathbb{M}$, dan

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} A_{ik}\,B_{kj} \quad (i, j = 1, 2)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **c.** Is $\{\mathbb{M}, \odot\}$ associatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Aan de ene kant hebben we

$$(A \odot B) \odot C = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}(A\,B + B\,A)\right) C + C\,\left(\frac{1}{2}(A\,B + B\,A)\right)\right) = \frac{1}{4}\,(A\,B\,C + B\,A\,C + C\,A\,B + C\,B\,A)\,.$$

Aan de andere kant geldt

$$A \odot (B \odot C) = \frac{1}{2}\left(A\,\left(\frac{1}{2}(B\,C + C\,B)\right) + \left(\frac{1}{2}(B\,C + C\,B)\,A\right)\right) = \frac{1}{4}\,(A\,B\,C + A\,C\,B + B\,C\,A + C\,B\,A)\,.$$

Voor het verschil vinden we dus

$$(A \odot B) \odot C - A \odot (B \odot C) = \frac{1}{4}\,(B\,A\,C + C\,A\,B - A\,C\,B - B\,C\,A) \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}\,[B, [A, C]]\,.$$

Bij $*$ is de definitie van de commutator gebruikt, zie hieronder. Dat dit niet-triviaal kan zijn volgt uit een voorbeeld, zoals

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad [B, [A, C]] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusie: $\{\mathbb{M}, \odot\}$ is niet associatief.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Is $\{\mathbb{M}, \odot\}$ commutatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Dat $\{\mathbb{M}, \odot\}$ commutatief is volgt direct uit commutativiteit van matrixoptelling (gebruikt in stap $*$ hieronder). Kies maar $A, B \in \mathbb{M}$ willekeurig, dan geldt

$$A \odot B = \frac{1}{2}(A\,B + B\,A) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(B\,A + A\,B) = B \odot A\,.$$

We voorzien $\mathbb{M}$ van een haakjesoperator $[\ ,\ ] : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M} : (A, B) \mapsto [A, B]$, als volgt:

$$[A, B] = A\,B - B\,A\,.$$

Wederom wordt in het rechterlid gebruik gemaakt van het gebruikelijke matrixprodukt. De verzameling $\mathbb{M}$, voorzien van de operator $[\ ,\ ]$, wordt aangeduid als $\{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$.

($2\frac{1}{2}$) **e.** Bewijs dat voor alle $A, B, C \in \{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$ geldt $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Met behulp van de definitie schrijven we het linkerlid uit:

$$
\begin{aligned}
&[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]] \\
&\quad = A\,(B\,C-C\,B)-(B\,C-C\,B)\,A+B\,(C\,A-A\,C)-(C\,A-A\,C)\,B+C\,(A\,B-B\,A)-(A\,B-B\,A)\,C \\
&\quad = A\,B\,C-A\,C\,B-B\,C\,A+C\,B\,A+B\,C\,A-B\,A\,C-C\,A\,B+A\,C\,B+C\,A\,B-C\,B\,A-A\,B\,C+B\,A\,C=0\,.
\end{aligned}
$$

($2\frac{1}{2}$) **f.** Is $\{\mathbb{M},[\;,\;]\}$ associatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Associativiteit vereist dat $[[A,B],C]=[A,[B,C]]$ voor alle $A,B,C\in\mathbb{M}$. Uit onderdeel e volgt echter dat

$$[[A,B],C]-[A,[B,C]]=[B,[C,A]]\,.$$

Om dezelfde reden als gegeven in onderdeel c is dit i.h.a. niet-triviaal, dus $\{\mathbb{M},[\;,\;]\}$ is niet associatief.

($2\frac{1}{2}$) **g.** Is $\{\mathbb{M},[\;,\;]\}$ commutatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Dat $\{\mathbb{M},\odot\}$ niet commutatief is volgt direct uit anticommutativiteit van het matrixverschil (gebruikt bij stap $*$ hieronder). Kies maar $A,B\in\mathbb{M}$ willekeurig, dan geldt

$$[A,B]=A\,B-B\,A\stackrel{*}{=}-(B\,A-A\,B)=-[B,A]\,.$$

Dit is i.h.a. niet de nulmatrix.

♣

(*10*) **3.** We beschouwen de tweede orde differentiaalvergelijking (elk puntje staat voor een afgeleide)

$$L(u)\stackrel{\text{def}}{=}a\,\ddot{u}+b\,\dot{u}+c\,u+d=0\,.$$

Hierin is $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}:t\mapsto u(t)$ een complexwaardige scalaire functie, en zijn $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ constanten. We nemen aan dat er een niet-lege oplossingsverzameling S bestaat van het type

$$S\stackrel{\text{def}}{=}\{u\in C^2(\mathbb{R})\,|\,L(u)=0\}\subset C^2(\mathbb{R})\qquad\text{(Je mag aannemen dat } C^2(\mathbb{R})\text{ een lineaire ruimte is.)}$$

Onder welke voorwaarden op de coëfficiënten $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ vormt S een lineaire ruimte? Bewijs.

Stel $u,v\in S$ en $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Beschouw de functie $\lambda\,u+\mu\,v$:

$$
\begin{aligned}
L(\lambda\,u+\mu\,v) &= a\,\frac{d^2}{dt^2}\,(\lambda\,u+\mu\,v)+b\,\frac{d}{dt}\,(\lambda\,u+\mu\,v)+c\,(\lambda\,u+\mu\,v)+d \\
&\stackrel{*}{=} a\,(\lambda\,\ddot{u}+\mu\,\ddot{v})+b\,(\lambda\,\dot{u}+\mu\,\dot{v})+c\,(\lambda\,u+\mu\,v)+d \\
&\stackrel{\star}{=} \lambda\,L(u)+\mu\,L(v)-(\lambda+\mu-1)\,d\stackrel{\circ}{=}-(\lambda+\mu-1)\,d=0
\end{aligned}
$$

voor alle $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ d.e.s.d.a. $d=0$. Bij $*$ is lineariteit van differentiëren gebruikt. Bij $\star$ is de definitie van L gebruikt na enkele elementaire algebraïsche manipulaties. Bij $\circ$ is de eigenschap $u,v\in S$ gebruikt.

♣

(25) **4.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie voor $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx$$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

We definiëren de volgende elementaire blokfunctie in het Fourier domein:

$$\widehat{\beta}(\omega) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\,,$$

waarin de indicatorfunctie gegeven wordt middels het volgende functievoorschrift:

$$\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2} & \text{als } \omega = \pm\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{als } \omega \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

De Fourierinverse van de functie $\widehat{\beta} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ wordt aangeduid als $\beta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

(5) **a.** Bewijs dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\, dx = 1$.

Volgens de definitie van Fouriertransformatie geldt

$$\widehat{\beta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\, e^{-i\omega x}\, dx\,.$$

Invullen van $\omega = 0$ levert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\, dx = \widehat{\beta}(0) \stackrel{*}{=} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(0) = 1\,,$$

waarbij bij $*$ het expliciet gegeven functievoorschrift voor $\widehat{\beta}(\omega)$ gebruikt is.

We genereren nu een één-parameter familie van functies in het spatiële domein door de functie β als volgt te schalen:

$$\beta_\lambda(x) = A(\lambda)\, \beta(\lambda\, x)\,.$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}^+$ een parameter en $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \lambda \mapsto A(\lambda)$ een nader te bepalen amplitude. De Fouriergetransformeerde van de functie $\beta_\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ wordt aangeduid als $\widehat{\beta}_\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

(5) **b.** Bepaal $\widehat{\beta}_\lambda(\omega)$ voor $\omega \in \mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Volgens de definitie van Fouriertransformatie geldt

$$\widehat{\beta}_\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_\lambda(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \stackrel{*}{=} A(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda\, x)\, e^{-i\omega x}\, dx \stackrel{\star}{=} \frac{A(\lambda)}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y)\, e^{-i\omega y/\lambda}\, dy = \frac{A(\lambda)}{\lambda}\, \widehat{\beta}\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) = \frac{A(\lambda)}{\lambda}\, \chi_{[-\frac{1}{2}\lambda,\frac{1}{2}\lambda]}(\omega)\,.$$

Bij $*$ is de definitie van β_λ in termen van β gebruikt (en is de constante amplitudefactor buiten de integraal gehaald). Bij $\star$ is substitutie van variabelen, $\lambda x = y$, gebruikt. De voorlaatste stap volgt wederom uit de definitie van Fouriertransformatie. De laatste stap volgt uit het gegeven functievoorschrift.

We leggen nu de volgende normeringseis op:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta_\lambda(x)\, dx = 1\,.$$

c. Bepaal $A(\lambda)$ voor $\lambda \in \mathbb{R}^+$ op twee manieren:

($2\frac{1}{2}$) **c1.** Rechtstreeks, d.w.z. door expliciete berekening van bovenstaande spatiële integraal.

Er geldt

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_\lambda(x)\, dx \stackrel{*}{=} A(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda\, x)\, dx \stackrel{\star}{=} \frac{A(\lambda)}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(y)\; dy \stackrel{\text{a}}{=} \frac{A(\lambda)}{\lambda}\,,$$

dus $A(\lambda) = \lambda$. Bij $*$ is de definitie van β_λ in termen van β gebruikt (en is de constante amplitudefactor buiten de integraal gehaald). Bij $\star$ is substitutie van variabelen, $\lambda x = y$, gebruikt. De rest volgt uit onderdeel **a**.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** Door gebruik te maken van het functievoorschrift voor $\widehat{\beta}_\lambda(\omega)$ uit onderdeel **b**.

Er geldt

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_\lambda(x)\, dx \stackrel{*}{=} \widehat{\beta}_\lambda(\omega = 0) \stackrel{\text{b}}{=} \frac{A(\lambda)}{\lambda}\,,$$

dus $A(\lambda) = \lambda$. Bij $*$ is de definitie van Fouriertransformatie gebruikt voor $\omega = 0$.

(5) **d.** Zij $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Bewijs: $\beta_\lambda * \beta_\mu = \beta_{\min\{\lambda,\mu\}}$. Hierin staat de operator $*$ voor het gebruikelijke convolutieprodukt op $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ en duidt $\min V$ op het kleinste element van de verzameling $V \subset \mathbb{R}$.

$\beta_\lambda * \beta_\mu = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(\beta_\lambda)\, \mathscr{F}(\beta_\mu)) \stackrel{*}{=} \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(\beta_{\min\{\lambda,\mu\}})) = \beta_{\min\{\lambda,\mu\}}$. Bij $*$ is de definitie van $\widehat{\beta}_\lambda = \mathscr{F}(\beta_\lambda)$ als een in de oorsprong gecentreerde blokfunctie met amplitude 1 en breedte λ gebruikt.

(5) **e.** Bepaal $\beta_\lambda(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

$$\beta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\beta}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{ix}\, e^{i\omega x} \right]_{\omega=-\frac{1}{2}}^{\omega=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sinc}(\frac{1}{2}\, x)$$

Bij $*$ is het gegeven functievoorschrift voor $\widehat{\beta}(\omega)$ gebruikt. Bij de laatste stap is de definitie van de sinc-functie gebruikt:

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0, \\ 1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Gevolg:

$$\beta_\lambda(x) \stackrel{\text{c}}{=} \lambda\, \beta(\lambda\, x) = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{sinc}(\frac{1}{2} \lambda\, x)\,.$$

Hierbij is in de eerste stap, naast het resultaat uit onderdeel **c**, de definitie van de herschaalde functie β_λ gebruikt.

♣

(20) **5.** Met $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ duiden we hier de klasse van *reëelwaardige* Schwartz functies in één variabele aan, voorzien van het standaard inprodukt

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, \psi(x)\, dx\,.$$

Je mag hieronder gebruik maken van het gegeven dat $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ voor alle $p \geq 1$.

(5) **a.** Laat zien dat deze integraal goed gedefinieerd is voor alle $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(*Hint:* Cauchy-Schwartz.)

Gebruik makend van de hint en de definitie volgt voor elke $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\,\psi\|_1 \leq \|\phi\|_2\,\|\psi\|_2\,,$$

waarin in de laatste stap de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz is toegepast. Je kunt echter ook de algemenere ongelijkheid van Hölder gebruiken:

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq \|\phi\,\psi\|_1 \leq \|\phi\|_p\,\|\psi\|_q$$

met willekeurig gekozen $p, q \geq 1$ waarvoor

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

waarbij ook de keuzes $(p,q) = (1,\infty)$ en $(p,q) = (\infty, 1)$ toelaatbaar zijn. Dit alles is mogelijk bij de gratie van de inclusie $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ voor elke $p \geq 1$ (inclusief $p = \infty$).

We bekijken de afbeeldingen $A : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \phi \mapsto A(\phi)$ en $B : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \phi \mapsto B(\phi)$, gegeven door de volgende functievoorschriften:

$$\begin{aligned} A(\phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\,, \\ B(\phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\,. \end{aligned}$$

($2\frac{1}{2}$) **b.** Laat zien dat voor alle $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ geldt: $\langle\phi|A(\psi)\rangle = \langle B(\phi)|\psi\rangle$. (M.a.w. bewijs $B = A^{\mathrm{T}}$.)

$$\begin{aligned} \langle\phi|A(\psi)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,A(\psi)(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi(x)\,dx \\ &\overset{\text{p.i.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\left(x - \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,B(\phi)(x)\,dx = \langle B(\phi)|\psi\rangle\,. \end{aligned}$$

In de met "p.i." aangeduide stap is partiële integratie toegepast (m.b.t. de integrand $\phi\,\psi'$), de rest volgt uit definities.

($2\frac{1}{2}$) **c.** Laat zien dat $[A, B] = I$, waarin de commutator gedefinieerd is als $[A, B] = AB - BA$ en waarin het rechterlid de identiteitsafbeelding op $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ is, d.w.z. $I(\phi) = \phi$ voor alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Voor $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ willekeurig geldt

$$\begin{aligned} [A,B]\phi(x) &= (AB - BA)\,\phi(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{d}{dx}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)\phi(x) - \left(x - \frac{d}{dx}\right)\left(x + \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\right] \\ &\overset{*}{=} \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\phi(x) - (x^2-1)\phi(x)\right] = \phi(x)\,. \end{aligned}$$

Bij $*$ zijn enkele algebraïsche vereenvoudigingen doorgevoerd. Aangezien dit voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt volgt dat $[A,B]\phi = \phi$ en aangezien op haar beurt de functie $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ hierin willekeurig is geldt $[A,B] = I$.

Stelling. $[A, B^k] = k\,B^{k-1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Hierin staat $B^k = B \circ \ldots \circ B$ voor het k-maal toepassen van de afbeelding B ($B^0 = I$).

($2\frac{1}{2}$) **d.** Bewijs dat indien de stelling juist is voor zekere $k \in \mathbb{N}$, zij ook juist is voor $k+1 \in \mathbb{N}$. Bewijs

vervolgens de stelling.
(*Hint:* Gebruik onderdeel **c**.)

Door uit te schrijven, gebruik makend van de definitie van de commutator, zien we dat

$$[A, B^{k+1}] = A\,B^{k+1} - B^{k+1}\,A \overset{*}{=} A\,B^{k+1} \overbrace{-B^k\,A\,B + B^k\,A\,B}^{0} - B^{k+1}\,A \overset{\star}{=} [A, B^k]\,B + B^k\,[A, B] \overset{\circ}{=} k\,B^{k-1}\,B + B^k\,I \overset{\bullet}{=} (k+1)\,B^k .$$

De stap bij $*$ is triviaal, hier zijn twee elkaar opheffende termen toegevoegd. De stap bij $\star$ is eveneens triviaal, deze volgt uit de definitie van de commutator. Bij $\circ$ is verondersteld dat de stelling juist is voor $k \in \mathbb{N}$, zodat we voor de eerste term in het rechterlid de stelling mogen toepassen, terwijl we voor de tweede term onderdeel **c** aanroepen. Tenslotte is bij $\bullet$ een wederom triviale algebraïsche herschrijving gedaan. Het resultaat toont dus dat de stelling ook geldt voor $k + 1$. Roep in herinnering dat hiervoor twee eigenschappen benut zijn, namelijk de *inductiehypothese* (dat de stelling voor zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt) en de *inductiestap* (dat er een $k \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de stelling geldig is, in dit geval $k = 1$, zie **c**). Inductiestap plus inductiehypothese impliceren logischerwijs dat de stelling juist is voor elke $k \in \mathbb{N}$ groter dan die waarde van k waarvoor de inductiestap geldt. Dit algemene bewijsprincipe heet *het principe van volledige inductie.*

N.B. Merk op dat we voor de inductiestap ook het (triviale!) geval $k = 0$ hadden mogen nemen, zodat de stelling kennelijk geldt voor alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

We definiëren de functie $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ als een (willekeurige) oplossing van de vergelijking

$$A(\phi_0) = 0\,,$$

ervan uitgaand dat er een niet-triviale oplossing bestaat. Op basis hiervan definiëren we de functies $\phi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ voor elke $k \in \mathbb{N}$, als volgt:

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}\,B^k(\phi_0)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **e1.** Bewijs: $B(\phi_k) = \sqrt{k+1}\,\phi_{k+1}$.

We hebben hier enkel de definitie van ϕ_k nodig:

$$B(\phi_k) = B\left(\frac{1}{\sqrt{k!}}\,B^k(\phi_0)\right) = \frac{1}{\sqrt{k!}}\,B^{k+1}(\phi_0) \overset{*}{=} \sqrt{k+1}\,\frac{1}{\sqrt{(k+1)!}}\,B^{k+1}(\phi_0) = \sqrt{k+1}\,\phi_{k+1}\,.$$

Bij $*$ is de definitie van faculteiten gebruikt, de rest volgt uit de definitie van ϕ_k.

($2\frac{1}{2}$) **e2.** Bewijs: $A(\phi_k) = \sqrt{k}\,\phi_{k-1}$.
(*Hint:* Gebruik onderdeel **d**.)

Gebruik makend van onderdeel **d**:

$$A(\phi_k) = \frac{1}{\sqrt{k!}} A\,B^k(\phi_0) \overset{\mathrm{d}}{=} \frac{1}{\sqrt{k!}}\left(B^k\,A + k\,B^{k-1}\right)(\phi_0) \overset{*}{=} \frac{k}{\sqrt{k!}}\,B^{k-1}(\phi_0) \overset{\star}{=} \sqrt{k}\,\phi_{k-1}\,.$$

Bij $*$ is de eigenschap $A(\phi_0) = 0$ gebruikt, bij $\star$ de definitie van ϕ_{k-1}. (In de eerste stap is overigens ook weer lineariteit van A gebruikt.)

($2\frac{1}{2}$) **f.** Los op: $A(\phi_0) = 0$, d.w.z. bepaal de functie(s) $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ die hieraan voldoen.

We moeten de differentiaalvergelijking $x\,\phi_0(x) + \phi_0'(x) = 0$ oplossen. Volgens standaardprocedure passen we scheiding van variabelen toe (negeer het probleem dat bij de noemer kan optreden):

$$-\frac{d\phi_0}{\phi_0} = x\,dx\,.$$

Integreren levert

$$-\ln|\phi_0| = \frac{1}{2}\,x^2 + c\,,$$

waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige integratieconstante is. Oftewel, voor willekeurige $A \in \mathbb{R}$,

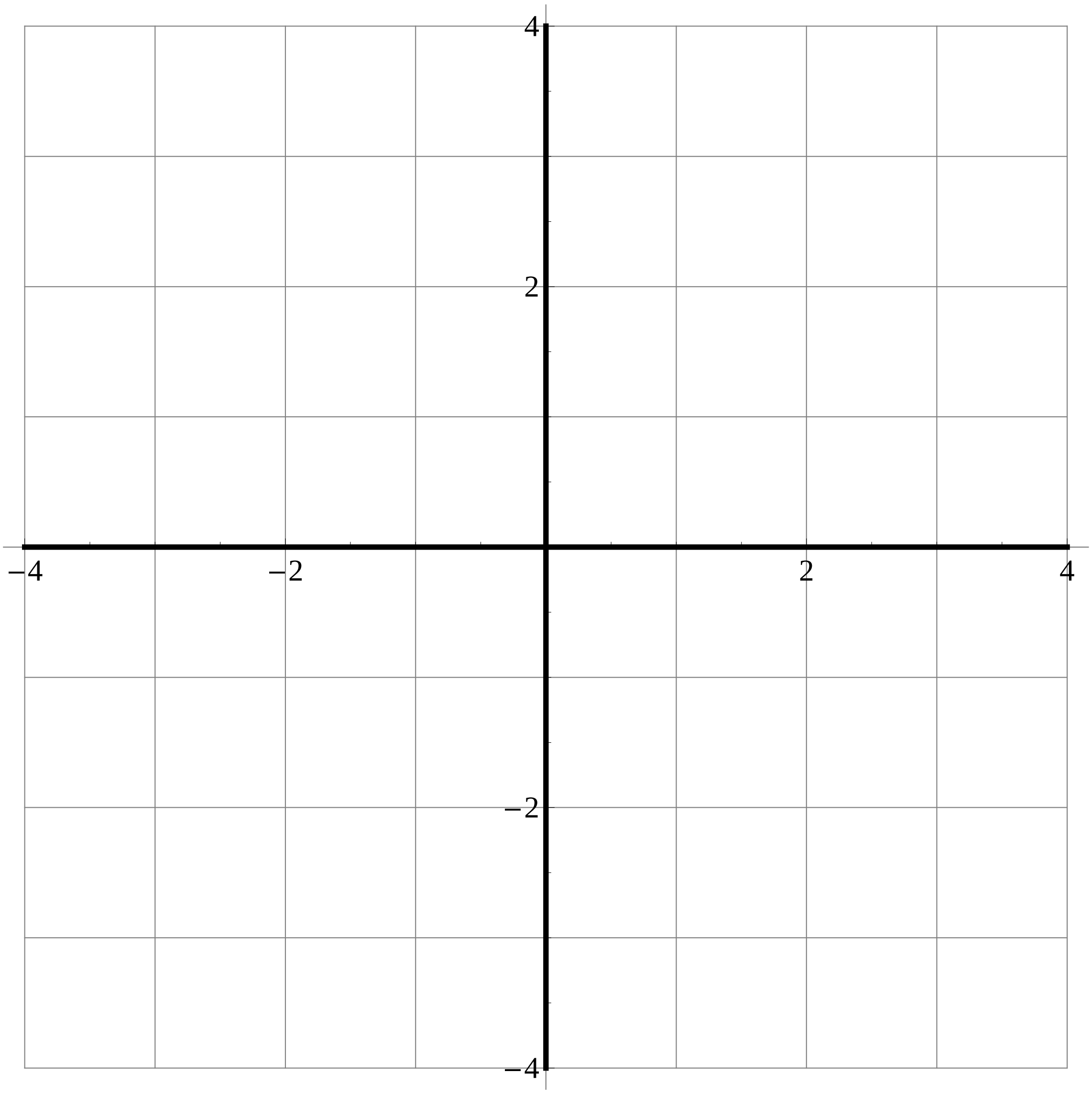
$$\phi_0(x) = A\,e^{-\frac{1}{2}\,x^2}\,.$$

Dat dit inderdaad een oplossing is kan direct geverifieerd worden door substitutie.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: Studentnummer:



Figuur 1: Deze figuur kun je gebruiken voor je antwoord bij vraag 1.