HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: vrijdag 13 juni 2008. Tijd: 09:00-12:00.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van collegedictaat en calculator is toegestaan. Het gebruik van de opgaven- en tentamenbundel is *niet* toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** We bekijken een open interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (niet leeg) en voorzien deze van een infix operator $\oplus : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \oplus y$, gegeven door het volgende voorschrift:

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + \lambda\, x\, y}\,.$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ een gegeven constante. De verzameling $\mathbb{I}$, voorzien van de operator $\oplus$, duiden we aan met $\{\mathbb{I}, \oplus\}$. (In plaats van $x \in \{\mathbb{I}, \oplus\}$ schrijven we ook kortheidshalve $x \in \mathbb{I}$.)

We gaan er in het volgende onderdeel van uit dat $\lambda = 0$.

(5) **a.** Hoe moeten we het interval $\mathbb{I}$ kiezen opdat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een groep vormt? Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een commutatieve groep vormt voor jouw keuze van $\mathbb{I}$.

In alle volgende onderdelen gaan we ervan uit dat $\lambda > 0$.

(5) **b.** Schets in één (x, y)-vlak de grafieken van de verzamelingen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 + \lambda\, x\, y = 0\}$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$ en geef de exacte coördinaten van de snijpunten. Gebruik de bijlage.

(5) **c.** Stel $\mathbb{I} = (-a, a)$ voor zekere $a \in \mathbb{R}$. Laat zien dat de grootste waarde van a waarvoor $1 + \lambda\, x\, y \neq 0$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$ gegeven wordt door $a = 1/\sqrt{\lambda}$.

(5) **d.** Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ gesloten is onder de operatie $\oplus$ voor $\mathbb{I} = (-1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})$.
(*Hint:* Onderzoek eerst $f_y(x) = x \oplus y$ voor vaste, willekeurig gekozen $y \in \mathbb{I}$ en bepaal vervolgens suprema en infima voor $x \oplus y$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.)

(5) **e.** Bewijs dat $\{\mathbb{I}, \oplus\}$ een commutatieve groep vormt voor $\mathbb{I} = (-1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})$.

♣

(*20*) **2.** We bekijken de verzameling van reëelwaardige 2×2-matrices,

$$\mathbb{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i,j = 1,2 \right\}.$$

Zonder bewijs nemen we aan dat $\mathbb{M}$, voorzien van de gebruikelijke matrixoptelling en reële scalairvermenigvuldiging, een reële lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Geef, m.b.v. (een) formule(s), precies aan wat hier bedoeld wordt met "de gebruikelijke matrixoptelling en reële scalairvermenigvuldiging".

We voorzien $\mathbb{M}$ van een infix operator $\odot : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M} : (A, B) \mapsto A \odot B$, als volgt:

$$A \odot B = \frac{1}{2}(A\,B + B\,A)\,.$$

In het rechterlid wordt het gebruikelijke matrixprodukt gebruikt. De verzameling $\mathbb{M}$, voorzien van de operator $\odot$, wordt aangeduid als $\{\mathbb{M}, \odot\}$.

($2\frac{1}{2}$) **b.** Geef aan wat hier precies bedoeld wordt met "het gebruikelijke matrixprodukt".

($2\frac{1}{2}$) **c.** Is $\{\mathbb{M}, \odot\}$ associatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Is $\{\mathbb{M}, \odot\}$ commutatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

We voorzien $\mathbb{M}$ van een haakjesoperator $[\ ,\ ] : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M} : (A, B) \mapsto [A, B]$, als volgt:

$$[A, B] = A\,B - B\,A\,.$$

Wederom wordt in het rechterlid gebruik gemaakt van het gebruikelijke matrixprodukt. De verzameling $\mathbb{M}$, voorzien van de operator $[\ ,\ ]$, wordt aangeduid als $\{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$.

($2\frac{1}{2}$) **e.** Bewijs dat voor alle $A, B, C \in \{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$ geldt $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

($2\frac{1}{2}$) **f.** Is $\{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$ associatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

($2\frac{1}{2}$) **g.** Is $\{\mathbb{M}, [\ ,\ ]\}$ commutatief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

♣

(*10*) **3.** We beschouwen de tweede orde differentiaalvergelijking (elk puntje staat voor een afgeleide)

$$L(u) \stackrel{\text{def}}{=} a\,\ddot{u} + b\,\dot{u} + c\,u + d = 0\,.$$

Hierin is $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto u(t)$ een complexwaardige scalaire functie, en zijn $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ constanten. We nemen aan dat er een niet-lege oplossingsverzameling S bestaat van het type

$S \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^2(\mathbb{R}) \,|\, L(u) = 0\} \subset C^2(\mathbb{R})$ (Je mag aannemen dat $C^2(\mathbb{R})$ een lineaire ruimte is.)

Onder welke voorwaarden op de coëfficiënten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vormt S een lineaire ruimte? Bewijs.

♣

(*25*) **4.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie voor $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \,.\end{aligned}$$

We definiëren de volgende elementaire blokfunctie in het Fourier domein:

$$\widehat{\beta}(\omega) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega)\,,$$

waarin de indicatorfunctie gegeven wordt middels het volgende functievoorschrift:

$$\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{als } \omega \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2} & \text{als } \omega = \pm\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{als } \omega \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

De Fourierinverse van de functie $\widehat{\beta} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ wordt aangeduid als $\beta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

(5) **a.** Bewijs dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\, dx = 1$.

We genereren nu een één-parameter familie van functies in het spatiële domein door de functie β als volgt te schalen:

$$\beta_\lambda(x) = A(\lambda)\, \beta(\lambda\, x)\,.$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}^+$ een parameter en $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \lambda \mapsto A(\lambda)$ een nader te bepalen amplitude. De Fouriergetransformeerde van de functie $\beta_\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ wordt aangeduid als $\widehat{\beta}_\lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

(5) **b.** Bepaal $\widehat{\beta}_\lambda(\omega)$ voor $\omega \in \mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

We leggen nu de volgende normeringseis op:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta_\lambda(x)\, dx = 1\,.$$

c. Bepaal $A(\lambda)$ voor $\lambda \in \mathbb{R}^+$ op twee manieren:

($2\frac{1}{2}$) **c1.** Rechtstreeks, d.w.z. door expliciete berekening van bovenstaande spatiële integraal.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** Door gebruik te maken van het functievoorschrift voor $\widehat{\beta}_\lambda(\omega)$ uit onderdeel **b**.

(5) **d.** Zij $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$. Bewijs: $\beta_\lambda * \beta_\mu = \beta_{\min\{\lambda,\mu\}}$. Hierin staat de operator $*$ voor het gebruikelijke convolutieprodukt op $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ en duidt $\min V$ op het kleinste element van de verzameling $V \subset \mathbb{R}$.

(5) **e.** Bepaal $\beta_\lambda(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

♣

(20) **5.** Met $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ duiden we hier de klasse van *reëelwaardige* Schwartz functies in één variabele aan, voorzien van het standaard inprodukt

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\psi(x)\,dx\,.$$

Je mag hieronder gebruik maken van het gegeven dat $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ voor alle $p \geq 1$.

(5) **a.** Laat zien dat deze integraal goed gedefinieerd is voor alle $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(*Hint:* Cauchy-Schwartz.)

We bekijken de afbeeldingen $A : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \phi \mapsto A(\phi)$ en $B : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \phi \mapsto B(\phi)$, gegeven door de volgende functievoorschriften:

$$\begin{aligned} A(\phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\,, \\ B(\phi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\phi(x)\,. \end{aligned}$$

($2\frac{1}{2}$) **b.** Laat zien dat voor alle $\phi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ geldt: $\langle\phi|A(\psi)\rangle = \langle B(\phi)|\psi\rangle$. (M.a.w. bewijs $B = A^{\mathrm{T}}$.)

($2\frac{1}{2}$) **c.** Laat zien dat $[A, B] = I$, waarin de commutator gedefinieerd is als $[A, B] = AB - BA$ en waarin het rechterlid de identiteitsafbeelding op $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ is, d.w.z. $I(\phi) = \phi$ voor alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Stelling. $[A, B^k] = k\,B^{k-1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Hierin staat $B^k = B \circ \ldots \circ B$ voor het k-maal toepassen van de afbeelding B ($B^0 = I$).

($2\frac{1}{2}$) **d.** Bewijs dat indien de stelling juist is voor zekere $k \in \mathbb{N}$, zij ook juist is voor $k+1 \in \mathbb{N}$. Bewijs vervolgens de stelling.
(*Hint:* Gebruik onderdeel **c**.)

We definiëren de functie $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ als een (willekeurige) oplossing van de vergelijking

$$A(\phi_0) = 0\,,$$

ervan uitgaand dat er een niet-triviale oplossing bestaat. Op basis hiervan definiëren we de functies $\phi_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ voor elke $k \in \mathbb{N}$, als volgt:

$$\phi_k = \frac{1}{\sqrt{k!}}\,B^k(\phi_0)\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **e1.** Bewijs: $B(\phi_k) = \sqrt{k+1}\,\phi_{k+1}$.

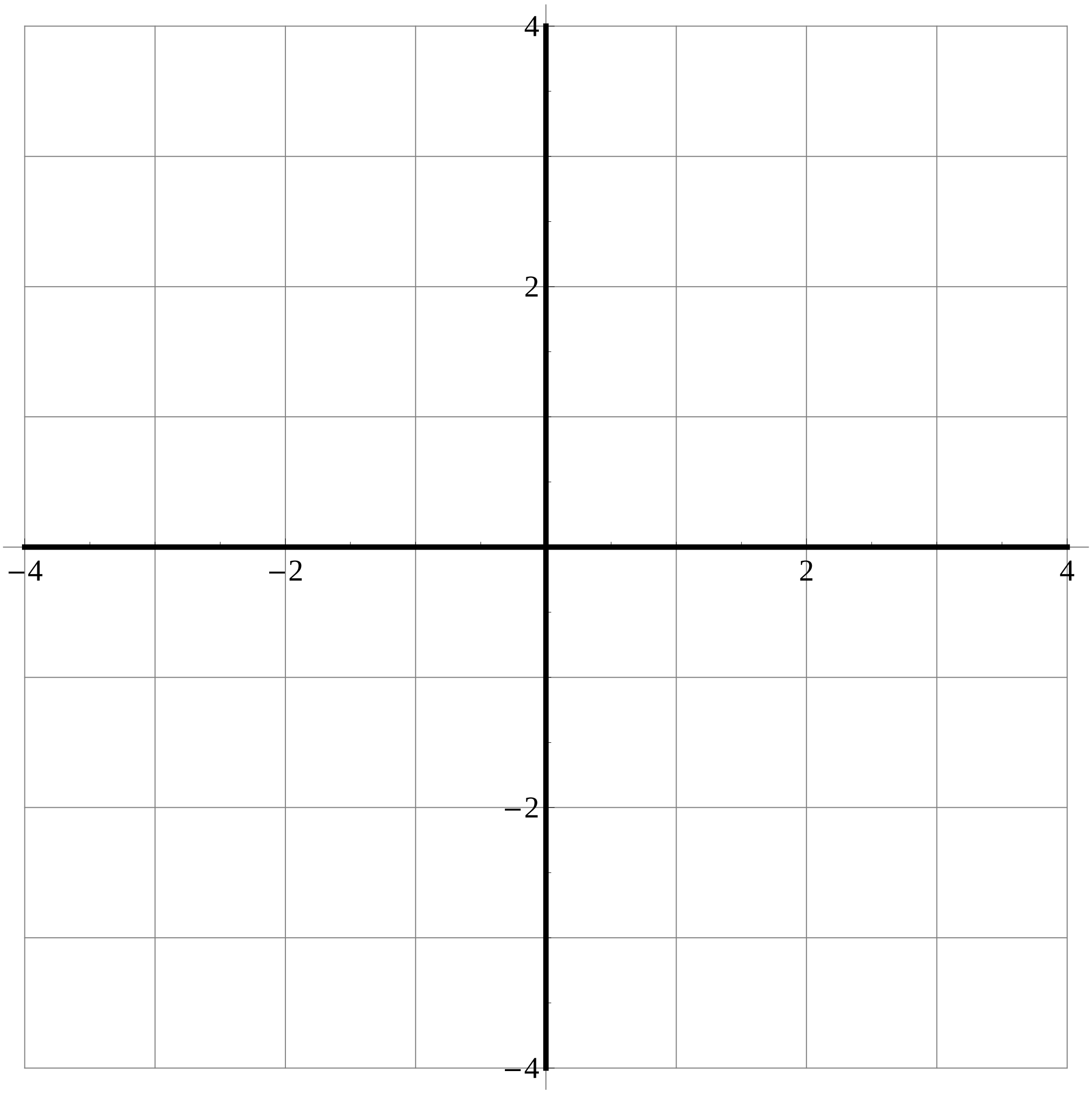
($2\frac{1}{2}$) **e2.** Bewijs: $A(\phi_k) = \sqrt{k}\,\phi_{k-1}$.
(*Hint:* Gebruik onderdeel **d**.)

($2\frac{1}{2}$) **f.** Los op: $A(\phi_0) = 0$, d.w.z. bepaal de functie(s) $\phi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ die hieraan voldoen.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: Studentnummer:



Figuur 1: Deze figuur kun je gebruiken voor je antwoord bij vraag 1.