HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Dinsdag 14 juni 2005. Tijd: 09.00–12.00 uur. Plaats:

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.**

Definieer de verzameling van reële 3×3 matrices

$$V = \left\{ X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i,j = 1,2,3 \right\}$$

en de deelverzameling

$$W = \left\{ Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b_{kl}, c_m \in \mathbb{R} \text{ voor alle } k,l,m = 1,2 \text{ en } \det Y = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0 \right\}.$$

We voorzien V van de gebruikelijke vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. Zonder bewijs nemen we verder aan dat V hiermee een lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Wat wordt er bedoeld met "de gebruikelijke vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging"? Geef hiervan de expliciete definities.

Onder "de gebruikelijke vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging" verstaat men de volgende definitie om superposities (lineaire combinaties) te maken: Zij $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $X, Y \in V$ willekeurig, waarbij de matrixcomponenten van X en Y gegeven worden door x_{ij}, respectievelijk y_{ij} voor $i,j = 1,2,3$, dan is

$$\lambda X + \mu Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_{11} + \mu y_{11} & \lambda x_{12} + \mu y_{12} & \lambda x_{13} + \mu y_{13} \\ \lambda x_{21} + \mu y_{21} & \lambda x_{22} + \mu y_{22} & \lambda x_{23} + \mu y_{23} \\ \lambda x_{31} + \mu y_{31} & \lambda x_{32} + \mu y_{32} & \lambda x_{33} + \mu y_{33} \end{pmatrix},$$

oftewel kortweg $(\lambda X + \mu Y)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_{ij} + \mu y_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3).$

(5) **b.** Is W (voorzien van dezelfde interne en externe operaties) een lineaire deelruimte? Zo ja, bewijs. Zo nee, geef tenminste één voorbeeld met toelichting waaruit blijkt dat dit niet het geval is.

Nee: Als $X, Y \in W$, dan geldt $x_{33} = y_{33} = 1$. Echter $(\lambda X + \mu Y)_{33} = \lambda + \mu$, hetgeen in het algemeen ongelijk is aan 1.

Naast vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging voeren we nog een operatie in, namelijk samenstelling. Voor iedere $A, B \in V$ identificeren we de samenstelling met het standaard matrixprodukt $AB \in V$. Roep in herinnering dat de componenten van het matrixprodukt AB gegeven worden door

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,,$$

indien a_{ij} en b_{ij} de componenten zijn van de $n \times n$ matrices A respectievelijk B (met in ons geval $i, j = 1, 2, 3$ willekeurig en $n = 3$). In onderstaande vragen beperken we ons tot de deelruimte $W \subset V$ en bekijken we haar algebraïsche structuur voortgebracht door het matrixprodukt.

(5) **c.** Laat zien dat W gesloten is ten aanzien van het matrixprodukt, d.w.z. bewijs dat $A, B \in W$ impliceert $AB \in W$.

Stel $A, B \in W$, met componenten a_{ij}, respectievelijk b_{ij}. De componenten van het matrixprodukt zijn dan

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj} \,.$$

We moeten nagaan of ook voor het produkt AB aan de beperkende voorwaarden in de definitie van W is voldaan. Stel $\mu = 1, 2$, dan geldt voor de eerste twee elementen op de onderste rij

$$(AB)_{3\mu} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k} b_{k\mu} \stackrel{*}{=} a_{33} b_{3\mu} \stackrel{*}{=} 0 \,.$$

De met $*$ gemarkeerde vergelijkingen volgen uit het feit dat $a_{3\mu} = b_{3\mu} = 0$ voor elke $\mu = 1, 2$. Verder geldt

$$(AB)_{33} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k} b_{k3} \stackrel{*}{=} a_{33} b_{33} \stackrel{\star}{=} 1 \,.$$

Hierin is, naast de voorgaande observatie, bij $\star$ gebruik gemaakt van het feit dat $a_{33} = b_{33} = 1$. De laatste beperkende voorwaarde is dat voor iedere $Y \in W$ geldt $\det Y \neq 0$. Inderdaad geldt ook voor het produkt van $A, B \in W$ dat $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$. Conclusie: $AB \in W$.

(5) **d.** Bewijs dat het matrixprodukt in W associatief is.

Het matrixprodukt in V is associatief, want als $A, B, C \in V$ met componenten a_{ij}, b_{ij}, respectievelijk c_{ij}, dan geldt voor alle $i, j = 1, 2, 3$,

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{3} (A_{i\ell} B_{\ell k}) C_{kj} = \sum_{\ell=1}^{3} A_{i\ell} \sum_{k=1}^{3} \left(B_{\ell k} C_{kj} \right) = \sum_{\ell=1}^{3} A_{i\ell} (BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij} \,.$$

Conclusie: $(AB)C = A(BC)$ voor alle $A, B, C \in V$ en dus ook voor alle $A, B, C \in W \subset V$.

(5) **e.** Laat zien dat er een (tweezijdig) eenheidselement $E \in W$ bestaat. Geef niet alleen de matrix, maar lever ook het bewijs.

Het eenheidselement $E \in W$ is

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Inderdaad is deze matrix van de vereiste vorm, zodat $E \in W$, vgl. het prototype zoals gegeven in de definitie van W, met $b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ en $c_\mu = 0$ voor $\mu, \nu = 1, 2$; i.h.b. is $\det E = 1 \neq 0$. Inderdaad geldt, trivialiter, $EX = XE = X$ voor alle $X \in W$ (wederom zelfs voor alle $X \in V$).

(5) **f.** Zij $X \in W$ willekeurig. Bestaat er een inverse element $X^{\text{inv}} \in W$, zodanig dat $X^{\text{inv}} X = X X^{\text{inv}} = E$? Zo ja, bewijs en geef zijn matrixrepresentatie, zo nee, geef een voorbeeld van een niet-inverteerbare matrix $X \in W$.

Ja. Allereerst, aangezien $X \in W$ volgt $\det X \neq 0$, dus geldt $X^{\text{inv}} \in V$. We moeten vervolgens de expliciete vorm van X^{inv} inspecteren om te kunnen beoordelen of $X^{\text{inv}} \in W$. Schrijf kortheidshalve

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \quad \text{met submatrices} \quad \mathbf{B} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversie levert dan

$$X^{\text{inv}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\text{inv}} & -\mathbf{B}^{\text{inv}}\mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right).$$

Explicieter:

$$X^{\text{inv}} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} & b_{12}c_2 - b_{22}c_1 \\ -b_{21} & b_{11} & -b_{11}c_2 + b_{21}c_1 \\ 0 & 0 & b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \end{pmatrix}.$$

Bewijs:

$$X X^{\text{inv}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}\mathbf{B}^{\text{inv}} & \mathbf{B}\left(-\mathbf{B}^{\text{inv}}\mathbf{c}\right) + \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) = E.$$

Analoog:

$$X^{\text{inv}} X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}^{\text{inv}}\mathbf{B} & \mathbf{B}^{\text{inv}}\mathbf{c} + \left(-\mathbf{B}^{\text{inv}}\mathbf{c}\right) \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) = E.$$

Uit bovenstaande schrijfwijze voor X^{inv} volgt $X^{\text{inv}} \in W$, vgl. wederom het prototype zoals gegeven in de definitie van W en de constatering dat $\det X^{\text{inv}} = 1/\det X \neq 0$.

(5) **g.** Is de vermenigvuldiging in W commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Met soortgelijke notatie als voorheen schrijven we gemakshalve

$$X = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \quad \text{en} \quad Y = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}' & \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right)$$

Dan volgt

$$[X, Y] \overset{\text{def}}{=} XY - YX = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}\mathbf{B}' - \mathbf{B}'\mathbf{B} & \mathbf{B}\mathbf{c}' - \mathbf{B}'\mathbf{c} + \mathbf{c} - \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right).$$

Als tegenvoorbeeld van commutativiteit kun je dus volstaan met, bijvoorbeeld, het vinden van twee niet-commuterende, reguliere 2×2-matrices $\mathbf{B}$ en $\mathbf{B}'$. Voorbeeld:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiervoor geldt

$$\left[\mathbf{B}, \mathbf{B}'\right] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B}\mathbf{B}' - \mathbf{B}'\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣

(25) **2.** We definiëren V als de lineaire ruimte van alle discrete, reëelwaardige 2×2 beelden met standaardbasis $\mathcal{B} = \{a, b, c, d\} \subset V$, zoals hieronder afgebeeld. Pixels indexeren we, indien gewenst, middels coördinatentweetallen $(i, j) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

(a) beeld a (b) beeld b (c) beeld c (d) beeld d

De vier elementen van de standaardbasis B_V.

Verder voeren we een *lineaire* afbeelding $P : V \to V$ in, waarvoor geldt

$$P(a) = \frac{1}{2}(a+b)\,, \quad P(b) = \frac{1}{2}(a+b)\,, \quad P(c) = \frac{1}{2}(c+d)\,, \quad P(d) = \frac{1}{2}(c+d)\,.$$

Tenslotte voorzien we V van het standaard inprodukt: Voor $f, g \in V$ hebben we dus

$$\langle f|g\rangle = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} f[i,j]\, g[i,j]\,.$$

Voor een gegeven lineaire afbeelding $A : V \to V$ is $A^{\mathrm{T}} : V \to V$ de (uniek gedefinieerde) lineaire afbeelding met de eigenschap

$$\langle A^{\mathrm{T}}(f)|g\rangle = \langle f|A(g)\rangle \quad \text{voor alle } f, g \in V\,.$$

(5) **a.** Bepaal the matrix behorende bij de afbeelding P ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

Noem de matrix die bij afbeelding P hoort $\mathbf{P}$. De i-de kolom van $\mathbf{P}$ bevat de coëfficiënten van het P-beeld van de i-de basisvector in $\mathcal{B}$ ten opzichte van $\mathcal{B}$. Deze zijn rechtstreeks af te lezen uit de gegevens voor $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ en $P(d)$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b. Bewijs dat P een orthogonale projectie is. Ga als volgt te werk:

(5) **b1.** Bewijs dat P idempotent is, d.w.z. $P^2 = P$. (Met P^2 bedoelen we de afbeelding die ontstaat door P tweemaal achtereenvolgens uit te voeren.)

Je kunt dit bewijzen aan de hand van de definitie van P of met behulp van de matrix $\mathbf{P}$ van P. Uit de definitie van P volgt, gebruik makend van lineariteit:

$$
\begin{aligned}
P^2(a) &= P(P(a)) = P(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}P(a) + \frac{1}{2}P(b) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}(a+b) = P(a) \\
P^2(b) &= P(P(b)) = P(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}P(a) + \frac{1}{2}P(b) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}(a+b) = P(b) \\
P^2(c) &= P(P(c)) = P(\frac{1}{2}(c+d)) = \frac{1}{2}P(c) + \frac{1}{2}P(d) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(c+d)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(c+d)) = \frac{1}{2}(c+d) = P(c) \\
P^2(d) &= P(P(d)) = P(\frac{1}{2}(c+d)) = \frac{1}{2}P(c) + \frac{1}{2}P(d) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(c+d)) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(c+d)) = \frac{1}{2}(c+d) = P(d)
\end{aligned}
$$

Als de beelden van alle basisvectoren onder de samengestelde afbeelding P^2 gelijk zijn aan die onder P zelf, is de afbeelding idempotent a.g.v. lineariteit. Immers, als $f = \lambda a + \mu b + \nu c + \rho d \in V$ een willekeurig beeld is, dan geldt $P^2(f) = P^2(\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d) = P(P(\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d)) = P(\lambda P(a) + \mu P(b) + \nu P(c) + \rho P(d)) = P(\lambda a + \mu b + \nu c + \rho d) = P(f)$.
Alternatief bewijs: Voor de matrix $\mathbf{P}$ geldt

$$
\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{P}\,.
$$

Als de matrix van een lineaire afbeelding idempotent is, is de lineaire afbeelding dat ook.

(5) **b2.** Bewijs dat $P = P^{\mathrm{T}}$.
(*Hint:* Bewijs dat dit equivalent is met de constatering dat de matrix van P symmetrisch is.)

Voor notationeel gemak stellen we hieronder $e_1 = a$, $e_2 = b$, $e_3 = c$ en $e_4 = d$. Stel $f, g \in V$, dus $f = \sum_{i=1}^4 f_i e_i$ en $g = \sum_{i=1}^4 g_i e_i$ voor zekere $f_i, g_i \in \mathbb{R}$. Voor een willekeurige lineaire afbeelding A geldt dan

$$
A(g) = \sum_{i=1}^4 [A(g)]_i \, e_i = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} g_j e_i \,,
$$

waarin A_{ij} de matrixcomponenten zijn van de bij A behorende matrix. Gevolg:

$$
\langle f | A(g) \rangle = \langle \sum_{i=1}^4 f_i e_i | \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 A_{jk} g_k e_j \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_i A_{jk} g_k \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_i A_{jk} g_k \delta_{ij} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 f_i A_{ik} g_k = \langle A^{\mathrm{T}}(f) | g \rangle \,,
$$

waarin A^{T} de lineaire afbeelding is met matrixrepresentatie $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, met componenten $A^{\mathrm{T}}_{ij} = A_{ji}$ op positie (i,j). Conclusie: $A^{\mathrm{T}} = A$ d.e.s.d.a. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, oftewel $A_{ij} = A_{ji}$, d.w.z. als de bij A behorende matrix symmetrisch is. Dit is inderdaad het geval voor de afbeelding P, c.q. de matrix $\mathbf{P}$, zie onderdeel a.

(5) **c.** Bewijs dat $\mathcal{B}' = \{a+b, c+d, a-b, c-d\}$ een alternatieve basis vormt voor V.

Te bewijzen: (i) $\operatorname{span} \mathcal{B}' = V$ en (ii) $\sum_{i=1}^4 f'_i e'_i = 0$ d.e.s.d.a. $f'_i = 0$ voor elke $i = 1,2,3,4$. Bewijs: (i) Met soortgelijke notatie als in het vorige onderdeel stellen we gemakshalve $e'_1 = a + b = e_1 + e_2$, $e'_2 = c + d = e_3 + e_4$, $e'_3 = a - b = e_1 - e_2$ en $e'_4 = c - d = e_3 - e_4$, of, omgekeerd, $e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3)$, $e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 - e'_3)$, $e_3 = \frac{1}{2}(e'_2 + e'_4)$ en $e_4 = \frac{1}{2}(e'_2 - e'_4)$. Door deze laatste vier identiteiten in te vullen in $f = \sum_{i=1}^4 f_i e_i$ zien we dat iedere $f \in V$ te schrijven is als lineaire combinatie van e'_i, namelijk $f = \sum_{i=1}^4 f'_i e'_i$ met $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $f'_2 = \frac{1}{2}(f_3 + f_4)$, $f'_3 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ en $f'_4 = \frac{1}{2}(f_3 - f_4)$. Dus $\operatorname{span} \mathcal{B}' = V$.
(ii) Aangezien de vectoren in $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk zijn geldt $f = 0 \in V$ d.e.s.d.a. $f_i = 0$ voor elke $i = 1,2,3,4$. Uit bovenstaande vergelijkingen volgt dat dit equivalent is met $f'_i = 0$ voor elke $i = 1,2,3,4$.

(5) **d.** Bepaal de matrix behorende bij de afbeelding P ten opzichte van de alternatieve basis $\mathcal{B}'$.

Uit de definitie van P en lineariteit volgt onmiddellijk

$$P(a+b) = a+b\,, \quad P(c+d) = c+d\,, \quad P(a-b) = 0\,, \quad P(c-d) = 0\,,$$

oftewel (notatie als voorheen)

$$P(e_1') = e_1'\,, \quad P(e_2') = e_2'\,, \quad P(e_3') = 0\,, \quad P(e_4') = 0\,,$$

dus, als $\mathbf{P}'$ de matrix is behorende bij P ten opzichte van $\mathcal{B}'$, dan hebben we

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣

(*25*) **3.** Beschouw het volgende beginwaardenprobleem voor de functie $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & = & \left(\Delta - m^2\right) u(x,t) & \text{voor } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Hierin is $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een reëelwaardig beeld en $m > 0$ een positieve constante. We nemen aan dat rand- en beginvoorwaarden zodanig zijn dat dit beginwaardenprobleem een eenduidige, voldoende nette oplossing heeft.

In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie. Voor (voldoende nette) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiëren we de functie $\widehat{u} = \mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ als volgt:

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x}\, u(x)\, dx \qquad \text{oftewel} \qquad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,,$$

waarin $\omega \cdot x$ staat voor $\omega_1\, x_1 + \ldots + \omega_n\, x_n$. Kortheidshalve schrijven we verder $\|x\|^2 = x \cdot x$ respectievelijk $\|\omega\|^2 = \omega \cdot \omega$.

In onderstaande opgaven mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \sqrt{\pi} \qquad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}\,.$$

(5) **a.** Laat zien dat bovenstaand beginwaardenprobleem equivalent is met het volgende beginwaardenprobleem in het Fourierdomein:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\omega,t)}{dt} & = & -\left(\|\omega\|^2 + m^2\right) \widehat{u}(\omega,t) & \text{voor } (\omega,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \widehat{u}(\omega,0) & = & \widehat{f}(\omega) & \text{voor } \omega \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(Merk op dat we dit als een *gewone* differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde kunnen opvatten, vandaar de afwijkende notatie voor de afgeleide in het linkerlid.)

Dit volgt door gebruik te maken van lineariteit van Fouriertransformatie en van de voor bovenstaande Fourierconventie geldende formele identiteit

$$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = i\omega_i \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n, \text{ dus in het bijzonder } \mathcal{F}(\Delta) = -\|\omega\|^2 .$$

Merk op dat er geen Fouriertransformatie plaatsvindt met betrekking tot de t-coördinaat.

(5) **b.** Bepaal de oplossing $\widehat{u}(\omega, t)$.
(*Hint:* Poneer een oplossing van het type $\widehat{u}(\omega, t) = Ae^{Bt}$ en bepaal de (ω-afhankelijke) parameters A, B.)

Door $\widehat{u}(\omega, t) = Ae^{Bt}$ in te vullen in de differentiaalvergelijking vind je $B = -(\|\omega\|^2 + m^2)$. Door de beginvoorwaarde op te leggen vind je $A = \widehat{f}(\omega)$. De oplossing is dus

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega)\, e^{-(\|\omega\|^2 + m^2)\, t} .$$

(5) **c.** Laat zien dat voor vaste $t \in \mathbb{R}^+$ de spatiële oplossing gegeven wordt door de convolutie

$$u(x, t) = (\phi_t * f)\,(x)$$

voor een of ander convolutiefilter $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Uit onderdeel b volgt

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega)\, \widehat{\phi}_t(\omega) \quad \text{waarin } \widehat{\phi}_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(\|\omega\|^2 + m^2)t} .$$

Een functieprodukt in het Fourierdomein correspondeert met een convolutieprodukt in het spatiële domein, dus

$$u(x, t) = (f * \phi_t)\,(x) .$$

(Let op: t wordt hier wederom als een constante parameter beschouwd en speelt dus geen rol in de convolutie-integraal.) Hierin is $\phi_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{\text{inv}}(\widehat{\phi}_t)$, d.i. het spatiële convolutiefilter met Fourierrepresentatie $\widehat{\phi}_t(\omega)$.

(5) **d.** Bepaal het functievoorschrift $\phi_t(x)$ van dit convolutiefilter.

Fourierinversie levert:

$$\phi_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}\, \widehat{\phi}_t(\omega)\, d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x - (\|\omega\|^2 + m^2)t}\, d\omega = e^{-m^2 t}\, \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x - \|\omega\|^2 t}\, d\omega .$$

Bekijk nu de volgende integraal:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x - \|\omega\|^2 t}\, d\omega \stackrel{*}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega\sqrt{t} - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\|^2}\, d\omega \stackrel{\star}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\, \frac{1}{\sqrt{t}^{\,n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega' - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\|^2}\, d\omega' .$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van de identiteit $i\omega \cdot x - \|\omega\|^2 t = -\|\omega\sqrt{t} - \dfrac{ix}{2\sqrt{t}}\|^2 - \dfrac{\|x\|^2}{4t}$. Bij $\star$ is subsitutie van variabelen gebruikt: $\omega\sqrt{t} = \omega' \in \mathbb{R}^n$ (let op de Jacobiaan!). Tot slot volgt, door gebruik te maken van de gegeven standaard integraal:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega' - \frac{ix}{2\sqrt{t}}\|^2}\, d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega_1' - \frac{ix_1}{2\sqrt{t}})^2}\, d\omega_1' \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega_n' - \frac{ix_n}{2\sqrt{t}})^2}\, d\omega_n' = \sqrt{\pi}^{\,n} .$$

Al met al:

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}}\, e^{-\frac{\|x\|^2}{4t} - m^2 t} .$$

(5) **e.** Bewijs: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\,dx = e^{-m^2 t}$.
(*Hint:* Bekijk $\widehat{\phi}_t(\omega)$.)

Zie onderdeel b: $\widehat{\phi}_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-(\|\omega\|^2+m^2)\,t}$, dus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x}\phi_t(x)\,dx\Big|_{\omega=0} = \widehat{\phi}_t(0) = e^{-m^2 t}$.

♣

(*15*) **4.** Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$. Hierin is $m > 0$ een constante. Het functievoorschrift wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ m\,x & \text{als } 0 < x < \frac{1}{m} \\ 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{m} \end{cases}$$

(5) **a.** Bepaal de (klassieke) afgeleide f' van f. Geef duidelijk aan wat het domein van f' is.
(*Hint:* Schets de grafiek van f.)

Het domein van f' is $\text{Dom}\, f' = \mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{m}\}$. Het functievoorschrift is:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ m & \text{als } 0 < x < \frac{1}{m} \\ 0 & \text{als } x > \frac{1}{m} \end{cases}$$

De functie is niet gedefinieerd in de aansluitpunten $x = 0$ en $x = \frac{1}{m}$.

Met $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ duiden we de bij functie f behorende reguliere getemperde distributie aan:

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto T_f[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi(x)\,dx\,.$$

Afgeleiden van reguliere getemperde distributies definiëren we op de gangbare manier:

$$T_f^{(k)}[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k\, T_f[\phi^{(k)}]\,.$$

Het superscript $k \in \mathbb{N}$ geeft aan om welke orde het gaat.

(5) **b.** Laat zien dat

$$T_f'[\phi] = m \int_0^{\frac{1}{m}} \phi(x)\,dx\,.$$

Dat wil zeggen, laat zien dat $T_f' = T_g$, waarin $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ gegeven wordt door

$$g(x) = m\,\chi_{[0,\frac{1}{m}]}(x)\,.$$

Hierin is χ_I de indicatorfunctie op de set $I \subset \mathbb{R}$, d.w.z. $\chi_I(x) = 1$ als $x \in I$, $\chi_I(x) = 0$ als $x \notin I$.

Er geldt

$$\begin{aligned} T_f'[\phi] &\stackrel{\text{def}}{=} -T_f[\phi'] \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi'(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} -m\int_0^{\frac{1}{m}} x\,\phi'(x)\,dx - \int_{\frac{1}{m}}^{\infty} \phi'(x)\,dx \\ &\stackrel{*}{=} -m\,[x\,\phi(x)]_0^{\frac{1}{m}} + m\int_0^{\frac{1}{m}} \phi(x)\,dx - [\phi(x)]_{\frac{1}{m}}^{\infty} \stackrel{\star}{=} m\int_0^{\frac{1}{m}} \phi(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\phi(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} T_g[\phi]\,, \end{aligned}$$

waarin g (respectievelijk T_g) de functie (respectievelijk reguliere getemperde distributie) is zoals hierboven gedefinieerd. Bij $*$ is gebruik gemaakt van partiële integratie, bij $\star$ zijn de randvoorwaarden gebruikt, met i.h.b. de eigenschap dat $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ voor elke testfunctie $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aangezien dit resultaat geldt voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ volgt dat de distributies in linker- en rechterlid gelijk zijn: $T'_f = T_g$.

(5) **c.** Bewijs: $\lim\limits_{m\to\infty} T'_f = \delta$. Hierin is δ de Dirac distributie, dus $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto \delta[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \phi(0)$ (*Hint:* Substitueer $\xi = mx$ in de integraaluitdrukking van $T'_f[\phi]$ alvorens de limiet te nemen.)

Volg de hint en gebruik het resultaat bij onderdeel b:

$$\lim_{m\to\infty} T'_f[\phi] \stackrel{\text{b}}{=} \lim_{m\to\infty} m \int_0^{\frac{1}{m}} \phi(x)\, dx \stackrel{*}{=} \lim_{m\to\infty} \int_0^1 \phi(\frac{\xi}{m})\, d\xi \stackrel{\star}{=} \int_0^1 \phi(0)\, d\xi = \phi(0) \stackrel{\text{def}}{=} \delta[\phi]\,.$$

Bij $*$ is de genoemde substitutie van variabelen uitgevoerd, bij $\star$ zijn limiet- en integraaloperaties omgewisseld en in de laatste stap is de definitie van de Dirac distributie gebruikt. Aangezien dit resultaat geldt voor alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ volgt dat de distributies in linker- en rechterlid gelijk zijn: $\lim_{m\to\infty} T'_f = \delta$.

EINDE