HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Dinsdag 14 juni 2005. Tijd: 09.00–12.00 uur. Plaats:

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.**

Definieer de verzameling van reële 3×3 matrices

$$V = \left\{ X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i,j = 1,2,3 \right\}$$

en de deelverzameling

$$W = \left\{ Y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; b_{kl}, c_m \in \mathbb{R} \text{ voor alle } k,l,m = 1,2 \text{ en } \det Y = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0 \right\} .$$

We voorzien V van de gebruikelijke vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. Zonder bewijs nemen we verder aan dat V hiermee een lineaire ruimte vormt.

(5) **a.** Wat wordt er bedoeld met "de gebruikelijke vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging"? Geef hiervan de expliciete definities.

(5) **b.** Is W (voorzien van dezelfde interne en externe operaties) een lineaire deelruimte? Zo ja, bewijs. Zo nee, geef tenminste één voorbeeld met toelichting waaruit blijkt dat dit niet het geval is.

Naast vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging voeren we nog een operatie in, namelijk samenstelling. Voor iedere $A, B \in V$ identificeren we de samenstelling met het standaard matrixprodukt $AB \in V$. Roep in herinnering dat de componenten van het matrixprodukt AB gegeven worden door

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,,$$

indien a_{ij} en b_{ij} de componenten zijn van de $n \times n$ matrices A respectievelijk B (met in ons geval $i, j = 1, 2, 3$ willekeurig en $n = 3$). In onderstaande vragen beperken we ons tot de deelruimte $W \subset V$ en bekijken we haar algebraïsche structuur voortgebracht door het matrixprodukt.

(5) **c.** Laat zien dat W gesloten is ten aanzien van het matrixprodukt, d.w.z. bewijs dat $A, B \in W$ impliceert $AB \in W$.

(5) **d.** Bewijs dat het matrixprodukt in W associatief is.

(5) **e.** Laat zien dat er een (tweezijdig) eenheidselement $E \in W$ bestaat. Geef niet alleen de matrix, maar lever ook het bewijs.

(5) **f.** Zij $X \in W$ willekeurig. Bestaat er een inverse element $X^{\text{inv}} \in W$, zodanig dat $X^{\text{inv}} X = X X^{\text{inv}} = E$? Zo ja, bewijs en geef zijn matrixrepresentatie, zo nee, geef een voorbeeld van een niet-inverteerbare matrix $X \in W$.

(5) **g.** Is de vermenigvuldiging in W commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

♣

(*25*) **2.** We definiëren V als de lineaire ruimte van alle discrete, reëelwaardige 2×2 beelden met standaardbasis $\mathcal{B} = \{a, b, c, d\} \subset V$, zoals hieronder afgebeeld. Pixels indexeren we, indien gewenst, middels coördinatentweetallen $(i, j) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

(a) beeld a (b) beeld b (c) beeld c (d) beeld d

De vier elementen van de standaardbasis B_V.

Verder voeren we een *lineaire* afbeelding $P : V \to V$ in, waarvoor geldt

$$P(a) = \frac{1}{2}(a+b)\,, \quad P(b) = \frac{1}{2}(a+b)\,, \quad P(c) = \frac{1}{2}(c+d)\,, \quad P(d) = \frac{1}{2}(c+d)\,.$$

Tenslotte voorzien we V van het standaard inprodukt: Voor $f, g \in V$ hebben we dus

$$\langle f|g \rangle = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} f[i,j]\, g[i,j]\,.$$

Voor een gegeven lineaire afbeelding $A : V \to V$ is $A^{\mathrm{T}} : V \to V$ de (uniek gedefinieerde) lineaire afbeelding met de eigenschap

$$\langle A^{\mathrm{T}}(f)|g\rangle = \langle f|A(g)\rangle \quad \text{voor alle } f, g \in V.$$

(5) **a.** Bepaal the matrix behorende bij de afbeelding P ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$.

b. Bewijs dat P een orthogonale projectie is. Ga als volgt te werk:

(5) **b1.** Bewijs dat P idempotent is, d.w.z. $P^2 = P$. (Met P^2 bedoelen we de afbeelding die ontstaat door P tweemaal achtereenvolgens uit te voeren.)

(5) **b2.** Bewijs dat $P = P^{\mathrm{T}}$.
(*Hint:* Bewijs dat dit equivalent is met de constatering dat de matrix van P symmetrisch is.)

(5) **c.** Bewijs dat $\mathcal{B}' = \{a + b, c + d, a - b, c - d\}$ een alternatieve basis vormt voor V.

(5) **d.** Bepaal de matrix behorende bij de afbeelding P ten opzichte van de alternatieve basis $\mathcal{B}'$.

♣

(*25*) **3.** Beschouw het volgende beginwaardenprobleem voor de functie $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left(\Delta - m^2\right) u(x,t) & \text{voor } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Hierin is $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een reëelwaardig beeld en $m > 0$ een positieve constante. We nemen aan dat rand- en beginvoorwaarden zodanig zijn dat dit beginwaardenprobleem een eenduidige, voldoende nette oplossing heeft.

In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie. Voor (voldoende nette) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiëren we de functie $\widehat{u} = \mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ als volgt:

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x}\, u(x)\, dx \qquad \text{oftewel} \qquad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,,$$

waarin $\omega \cdot x$ staat voor $\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n$. Kortheidshalve schrijven we verder $\|x\|^2 = x \cdot x$ respectievelijk $\|\omega\|^2 = \omega \cdot \omega$.

In onderstaande opgaven mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \sqrt{\pi} \qquad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}\,.$$

(5) **a.** Laat zien dat bovenstaand beginwaardenprobleem equivalent is met het volgende begin-

waardenprobleem in het Fourierdomein:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\omega,t)}{dt} &= -\left(\|\omega\|^2+m^2\right)\widehat{u}(\omega,t) & \text{voor } (\omega,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+ \\ \widehat{u}(\omega,0) &= \widehat{f}(\omega) & \text{voor } \omega\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

(Merk op dat we dit als een *gewone* differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde kunnen opvatten, vandaar de afwijkende notatie voor de afgeleide in het linkerlid.)

(5) **b.** Bepaal de oplossing $\widehat{u}(\omega,t)$.
(*Hint:* Poneer een oplossing van het type $\widehat{u}(\omega,t)=Ae^{Bt}$ en bepaal de (ω-afhankelijke) parameters A, B.)

(5) **c.** Laat zien dat voor vaste $t\in\mathbb{R}^+$ de spatiële oplossing gegeven wordt door de convolutie

$$u(x,t) = (\phi_t * f)(x)$$

voor een of ander convolutiefilter $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(5) **d.** Bepaal het functievoorschrift $\phi_t(x)$ van dit convolutiefilter.

(5) **e.** Bewijs: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\,dx = e^{-m^2 t}$.
(*Hint:* Bekijk $\widehat{\phi_t}(\omega)$.)

♣

(*15*) **4.** Gegeven is de functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$. Hierin is $m > 0$ een constante. Het functievoorschrift wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x\leq 0 \\ m\,x & \text{als } 0 < x < \frac{1}{m} \\ 1 & \text{als } x \geq \frac{1}{m} \end{cases}$$

(5) **a.** Bepaal de (klassieke) afgeleide f' van f. Geef duidelijk aan wat het domein van f' is.
(*Hint:* Schets de grafiek van f.)

Met $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ duiden we de bij functie f behorende reguliere getemperde distributie aan:

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto T_f[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi(x)\,dx\,.$$

Afgeleiden van reguliere getemperde distributies definiëren we op de gangbare manier:

$$T_f^{(k)}[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k\, T_f[\phi^{(k)}]\,.$$

Het superscript $k\in\mathbb{N}$ geeft aan om welke orde het gaat.

(5) **b.** Laat zien dat

$$T_f'[\phi] = m \int_0^{\frac{1}{m}} \phi(x)\, dx\,.$$

Dat wil zeggen, laat zien dat $T_f' = T_g$, waarin $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$ gegeven wordt door

$$g(x) = m\, \chi_{[0,\frac{1}{m}]}(x)\,.$$

Hierin is χ_I de indicatorfunctie op de set $I \subset \mathbb{R}$, d.w.z. $\chi_I(x) = 1$ als $x \in I$, $\chi_I(x) = 0$ als $x \notin I$.

(5) **c.** Bewijs: $\lim_{m\to\infty} T_f' = \delta$. Hierin is δ de Dirac distributie, dus $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto \delta[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \phi(0)$ (*Hint:* Substitueer $\xi = mx$ in de integraaluitdrukking van $T_f'[\phi]$ alvorens de limiet te nemen.)

EINDE