HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: 21 maart 2007. Tijd: 14:00-17:00. Plaats: AUD 15.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** Met $\mathbb{M}_n$ duiden we de verzameling van alle reëelwaardige $n \times n$ matrices aan. Waar in de rest van deze opgave gesproken wordt over "lineaire ruimte" bedoelen we steeds *reële* lineaire ruimte, d.i. een lineaire ruimte over het scalairlichaam $\mathbb{R}$.

(5) **a.** Door op geschikte wijze een vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren mogen we $\mathbb{M}_n$ opvatten als een lineaire ruimte. Geef aan hoe de "gebruikelijke" vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $\mathbb{M}_n$ gedefinieerd is.

Stel $M, N \in \mathbb{M}_n$, met componenten $M_{ij}, N_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan definiëren we de lineaire combinatie $L = \lambda M + \mu N \in \mathbb{M}_n$ als die matrix waarvan de componenten L_{ij} gegeven worden door $L_{ij} = \lambda M_{ij} + \mu N_{ij}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$.

Een *reële kwadratische vorm* op een lineaire ruimte V wordt gedefinieerd als een afbeelding $Q : V \to \mathbb{R} : v \mapsto Q(v)$, met de volgende eigenschappen:

- voor alle $v \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$, en
- de afbeelding $B_Q : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ is bilineair.

Hieronder bekijken we de volgende afbeelding:

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto Q_M(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \, M_{ij} \, v_j \quad \text{voor vast gekozen } M \in \mathbb{M}_n.$$

(5) **b.** Bewijs dat Q_M een reële kwadratische vorm op $\mathbb{R}^n$ is voor elke $M \in \mathbb{M}_n$.

Zij $M \in \mathbb{M}_n$ willekeurig. Dan geldt voor willekeurige vector $v \in \mathbb{R}^n$, met componenten v_i, $i = 1, \ldots, n$, en $\lambda \in \mathbb{R}$, het volgende. (Merk op dat de componenten van $\lambda v \in \mathbb{R}^n$ gegeven worden door $(\lambda v)_i = \lambda v_i$, $i = 1, \ldots, n$.)

$$Q_M(\lambda v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\lambda v)_i \, M_{ij} \, (\lambda v)_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda v_i \, M_{ij} \, \lambda v_j = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \, M_{ij} \, v_j = \lambda^2 \, Q_M(v) \, .$$

Voorts,

$$B_{Q_M}(v,w) = Q_M(v+w) - Q_M(v) - Q_M(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v+w)_i \, M_{ij} \, (v+w)_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \, M_{ij} \, v_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i \, M_{ij} \, w_j \, .$$

Gebruik makend van het gegeven dat $(v+w)_i = v_i + w_i$ volgt dat

$$B_{Q_M}(v,w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((v_i + w_i) \, M_{ij} \, (v_j + w_j) - v_i \, M_{ij} \, v_j - w_i \, M_{ij} \, w_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i \, M_{ij} \, w_j + w_i \, M_{ij} \, v_j) \; .$$

Bijgevolg geldt voor willekeurige $u, v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, gebruik makend van de regel $(\lambda \, u + \mu \, v)_i = \lambda \, u_i + \mu \, v_i$, dat

$$B_{Q_M}(\lambda \, u + \mu \, v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\lambda \, u + \mu \, v)_i \, M_{ij} \, w_j + w_i \, M_{ij} \, (\lambda \, u + \mu \, v)_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((\lambda \, u_i + \mu \, v_i) \, M_{ij} \, w_j + w_i \, M_{ij} \, (\lambda \, u_j + \mu \, v_j)) \; .$$

Dit kan herschreven worden tot

$$B_{Q_M}(\lambda \, u + \mu \, v, w) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_i \, M_{ij} \, w_j + w_i \, M_{ij} \, u_j) + \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (v_i \, M_{ij} \, w_j + w_i \, M_{ij} \, v_j) = \lambda \, B_{Q_M}(u,w) + \mu \, B_{Q_M}(v,w) \, .$$

Dit bewijst lineariteit van de afbeelding B_{Q_M} met betrekking tot haar eerste argument. Het bewijs van lineariteit met betrekking tot het tweede argument verloopt analoog.

$M \in \mathbb{M}_n$ heet *positief definiet* indien voor de bijbehorende kwadratische vorm geldt

$$Q_M(v) > 0 \quad \text{voor alle } v \in \mathbb{R}^n \text{ ongelijk aan de nulvector.}$$

Kortheidshalve duiden we met $\mathbb{M}_n^+ \subset \mathbb{M}_n$ de verzameling van alle positief definiete $M \in \mathbb{M}_n$ aan.

(5) **c.** Bewijs dat $\mathbb{M}_n^+$ géén lineaire (deel)ruimte is.

Stel $M \in \mathbb{M}_n^+$ met componenten M_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, en $v \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda < 0$ willekeurig, dan geldt voor de matrix $\lambda \, M$ (met componenten $(\lambda \, M)_{ij} = \lambda \, M_{ij}$) dat de bijbehorende kwadratische vorm niet positief definiet is, immers

$$Q_{\lambda \, M}(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \, (\lambda \, M)_{ij} \, v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \, \lambda \, M_{ij} \, v_j = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i \, M_{ij} \, v_j = \lambda \, Q_M(v) < 0 \, ,$$

wat in tegenspraak is met de eis van positiviteit. Bij de laatste stap is gebruik gemaakt van de definitie van $M \in \mathbb{M}_n^+$. (Er zijn uiteraard andere tegenvoorbeelden te bedenken.)

d. Stel $M \in \mathbb{M}_n^+$.

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Laat aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zien dat elementen M_{ij} van M negatief kunnen zijn.
(*Hint:* Beperk je tot het geval $M \in \mathbb{M}_2^+$.)

De volgende 2×2-matrix is positief definiet, ondanks een negatief element, nl. $M_{12} = -1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Immers, als $v \in \mathbb{R}^2$ willekeurig, dan $Q_M(v) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 v_i M_{ij} v_j = v_1^2 + v_2^2 - v_1 v_2$. Vatten we dit op als een kwadratische functie van v_1 met parameter v_2, d.i. $Q_M(v) = a v_1^2 + b v_1 + c$ met $a = 1, b = -v_2, c = v_2^2$, dan geldt voor haar discriminant

$$D = b^2 - 4ac = v_2^2 - 4v_2^2 = -3v_2^2 \leq 0 \, .$$

Derhalve heeft $Q_M(v)$ dus hooguit één nulpunt, en wel als $D = 0$, d.i. als $v_2 = 0$. Maar dan geldt $Q_M(v) = v_1^2 > 0$ tenzij ook $v_1 = 0$. Voor $v \in \mathbb{R}^2$ ongelijk aan de nulvector geldt dus altijd $Q_M(v) > 0$.

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Laat zien dat $M \in \mathbb{M}_n^+$ impliceert $M_{ii} > 0$ voor alle $i \in 1, \ldots, n$.

Kies $v \in \mathbb{R}^n$ zodanig dat slechts één van zijn componenten ongelijk nul is, zeg $v_i \neq 0$, $v_j = 0$ voor alle $j = 1, \ldots, n$ waarvoor $j \neq i$. Dan geldt $0 < Q_M(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i M_{ij} v_j = M_{ii} v_i^2$. (De ongelijkheid geldt per definitie van positiviteit van $M \in \mathbb{M}_n^+$.) Aangezien $v_i^2 > 0$ moet dus ook gelden $M_{ii} > 0$.

Gegeven de lineaire ruimten V en W. Met $\mathscr{L}(V, W)$ duiden we de verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W aan. We mogen $\mathscr{L}(V, W)$ zelf ook weer opvatten als een lineaire ruimte door op geschikte wijze een vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren.

(5) **e.** Geef aan hoe we een "voor de hand liggende" vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $\mathscr{L}(V, W)$ kunnen definiëren.

Stel $A, B \in \mathscr{L}(V, W)$ willekeurig, dus A en B zijn afbeeldingen van het type $A, B : V \to W$, waarbij V en W lineaire ruimten zijn. We moeten definiëren wat we bedoelen met de lineaire combinatie $\lambda A + \mu B : V \to W$ voor willekeurige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dit gaat als volgt. Stel $v \in V$ willekeurig, dan definiëren we de afbeelding $\lambda A + \mu B : V \to W$ middels haar functievoorschrift

$$(\lambda A + \mu B)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda A(v) + \mu B(v) \in W .$$

Merk op dat scalairvermenigvuldiging en vectoroptelling in het rechterlid die zijn welke op W ingevoerd waren.

f. Aangezien $\mathscr{L}(V, W)$ opgevat mag worden als lineaire ruimte, kunnen we naar believen ingewikkeldere lineaire ruimten construeren, zoals $\mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Met $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bedoelen we de lineaire ruimte van gladde, reëelwaardige functies op $\mathbb{R}^n$.

($2\frac{1}{2}$) **f1.** Hoe is vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gedefinieerd?

Als $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan definiëren we $\lambda f + \mu g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ middels het functievoorschrift $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) \in \mathbb{R}$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$. Merk op dat de scalairvermenigvuldiging en vectoroptelling in het rechterlid de gewone vermenigvuldiging respectievelijk optelling in $\mathbb{R}$ is.

Beschouw vervolgens de afbeelding $L : \mathbb{M}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, gegeven door

$$L : \mathbb{M}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^n) : M \mapsto Q_M \quad \text{met } Q_M \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ als in onderdeel a.}$$

($2\frac{1}{2}$) **f2.** Laat zien dat $L \in \mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Zij $M, N \in \mathbb{M}_n$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan

$$L(\lambda M + \mu N) = Q_{\lambda M + \mu N} .$$

Bekijk nu voor willekeurige $v \in V$ de uitdrukking

$$\begin{aligned} Q_{\lambda M + \mu N}(v) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i (\lambda M + \mu N)_{ij} v_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i (\lambda M_{ij} + \mu N_{ij}) v_j = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i M_{ij} v_j + \mu \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i N_{ij} v_j \\ &= \lambda Q_M(v) + \mu Q_N(v) = (\lambda Q_M + \mu Q_N)(v) . \end{aligned}$$

In de laatste stap is de gebruikelijke definitie voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging van reëelwaardige functies gebruikt. Omdat $v \in \mathbb{R}^n$ willekeurig is volgt $Q_{\lambda M + \mu N} = \lambda Q_M + \mu Q_N$ en daarmee dus

$$L(\lambda M + \mu N) = Q_{\lambda M + \mu N} = \lambda Q_M + \mu Q_N = \lambda L(M) + \mu L(N) .$$

Conclusie: $L : \mathbb{M}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is linear, oftewel $L \in \mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Een afbeelding $A \in \mathscr{L}(V, W)$ heet *injectief* indien $A(v_1) = A(v_2)$ impliceert $v_1 = v_2$ $(v_1, v_2 \in V)$.

(5) **g.** Is $L \in \mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$ uit onderdeel f injectief? Bewijs je antwoord.
(*Hint:* Toon aan dat we in de definitie van Q_M zonder verlies van algemeenheid mogen stellen dat M symmetrisch is, m.a.w. $M_{ij} = M_{ji}$ voor alle $i, j, \ldots, n$.)

Allereerst de hint: Elke matrix kan geschreven worden als de som van een symmetrische en antisymmetrische matrix, nl.

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right)}_{M^{(\mathrm{s})}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(M - M^{\mathrm{T}}\right)}_{M^{(\mathrm{a})}},$$

met $M^{\mathrm{T}}_{ij} = M_{ji}$. Oftewel, in termen van componenten:

$$M_{ij} = M^{(\mathrm{s})}_{ij} + M^{(\mathrm{a})}_{ij} \quad \text{met} \quad M^{(\mathrm{s})}_{ij} = \frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ji}) \quad \text{en} \quad M^{(\mathrm{a})}_{ij} = \frac{1}{2}(M_{ij} - M_{ji}) \, .$$

Merk nu op dat

$$Q_M(v) = Q_{M^{(\mathrm{s})}+M^{(\mathrm{a})}}(v) = Q_{M^{(\mathrm{s})}}(v) + Q_{M^{(\mathrm{a})}}(v) \, ,$$

waarbij in de laatste stap onderdeel f2 is gebruikt. Aangezien

$$Q_{M^{(\mathrm{a})}}(v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i M^{(\mathrm{a})}_{ij} v_j = 0$$

voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ vanwege antisymmetrie $M^{(\mathrm{a})}_{ij} = -M^{(\mathrm{a})}_{ji}$, volgt dat we $M^{(\mathrm{a})}$ willekeurig kunnen kiezen. Conclusie, stel $M_{1,2} \in \mathbb{M}_n$, dan

$$L(M_1) = L(M_2) \quad \text{d.e.s.d.a.} \quad L(M_1 - M_2) \stackrel{*}{=} 0 \quad \text{d.e.s.d.a.} \quad M_1 - M_2 \quad \text{(willekeurig) antisymmetrisch.}$$

Bij $*$ is lineariteit van L gebruikt (onderdeel f2). In het bijzonder hoeft dus niet te gelden $M_1 = M_2$.

(*40*) **2.** We construeren een 2-dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, opgespannen door de basis $\{\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\epsilon}\}$,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \, ,$$

voorzien van de gebruikelijke definitie voor optelling en scalairvermenigvuldiging, dat wil zeggen, als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$, met $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &\stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1)\,\boldsymbol{\delta} + (a_2 + b_2)\,\boldsymbol{\epsilon} \, , \\ \lambda\,\boldsymbol{\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda\,a_1)\,\boldsymbol{\delta} + (\lambda\,a_2)\,\boldsymbol{\epsilon} \, . \end{aligned}$$

Vervolgens voorzien we de aldus verkregen lineaire ruimte D van een algebraïsche structuur middels de volgende "vermenigvuldigingsregel": Als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$, dan

$$\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} a_1\,b_1\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\;\boldsymbol{\epsilon} \, . \tag{1}$$

a. Toon aan dat D aldus gedefinieerd een *commutatieve algebra met identiteit* vormt. Ga als volgt te werk:

($2\frac{1}{2}$) **a1.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $(\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma})$.

Stel $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\gamma} = c_1\,\boldsymbol{\delta} + c_2\,\boldsymbol{\epsilon}$. Dan is enerzijds

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma} &= ((a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon})(b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}))\,(c_1\,\boldsymbol{\delta} + c_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = (a_1\,b_1\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\;\boldsymbol{\epsilon})\,(c_1\,\boldsymbol{\delta} + c_2\,\boldsymbol{\epsilon}) \\ &= (a_1\,b_1)\,c_1\,\boldsymbol{\delta} + ((a_1\,b_1)\,c_2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon} = a_1\,b_1\,c_1\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_1\,c_2 + a_1\,b_2\,c_1 + a_2\,b_1\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon} \, . \end{aligned}$$

Anderzijds geldt voor het rechterlid

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma}) &= (a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,((b_1\,\boldsymbol{\delta}+b_2\,\boldsymbol{\epsilon})(c_1\,\boldsymbol{\delta}+c_2\,\boldsymbol{\epsilon})) = (a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(b_1\,c_1\,\boldsymbol{\delta}+(b_1\,c_2+b_2\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon})\\ &= a_1\,(b_1\,c_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,(b_1\,c_2+b_2\,c_1)+a_2\,(b_1\,c_1))\;\boldsymbol{\epsilon} = a_1\,b_1\,c_1\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,b_1\,c_2+a_1\,b_2\,c_1+a_2\,b_1\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Deze twee uitdrukkingen zijn identiek voor alle $a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

$(2\frac{1}{2})$ **a2.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma}$.

Vooruitlopend op onderdelen a3 en a6, die we hier bewezen achten:

$$\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}) \stackrel{\text{a6}}{=} (\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\,\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{a3}}{=} \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{a6}}{=} \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma}\,.$$

Voor het bewijs van a3 en a6 hieronder mogen we uiteraard geen gebruik maken van dit axioma a2. Een rechtstreeks bewijs verloopt analoog aan dat van a3 hieronder.

$(2\frac{1}{2})$ **a3.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma}$.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma} &= ((a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})+(b_1\,\boldsymbol{\delta}+b_2\,\boldsymbol{\epsilon}))\;(c_1\,\boldsymbol{\delta}+c_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = ((a_1+b_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_2+b_2)\,\boldsymbol{\epsilon})\;(c_1\,\boldsymbol{\delta}+c_2\,\boldsymbol{\epsilon})\\ &= (a_1+b_1)\,c_1\,\boldsymbol{\delta}+((a_1+b_1)\,c_2+(a_2+b_2)\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon} = (a_1\,c_1+b_1\,c_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,c_2+b_1\,c_2+a_2\,c_1+b_2\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Anderzijds geldt voor het rechterlid

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma} &= (a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(c_1\,\boldsymbol{\delta}+c_2\,\boldsymbol{\epsilon})+(b_1\,\boldsymbol{\delta}+b_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(c_1\,\boldsymbol{\delta}+c_2\,\boldsymbol{\epsilon})\\ &= ((a_1\,c_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,c_2+a_2\,c_1)\,\boldsymbol{\epsilon})+((b_1\,c_1)\,\boldsymbol{\delta}+(b_1\,c_2+b_2\,c_1)\,\boldsymbol{\epsilon})\\ &= (a_1\,c_1+b_1\,c_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,c_2+b_1\,c_2+a_2\,c_1+b_2\,c_1)\;\boldsymbol{\epsilon}\,.\end{aligned}$$

Deze twee uitdrukkingen zijn wederom identiek.

$(2\frac{1}{2})$ **a4.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in D$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\lambda\,(\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}) = (\lambda\,\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\,(\lambda\,\boldsymbol{\beta})$.

Er geldt

$$\lambda\,(\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}) = \lambda\,((a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(b_1\,\boldsymbol{\delta}+b_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = \lambda\,(a_1\,b_1\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,b_2+a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon}) \stackrel{*}{=} \lambda\,(a_1\,b_1)\,\boldsymbol{\delta}+\lambda\,(a_1\,b_2+a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon}$$

Bij $*$ is de definitie van scalairvermenigvuldiging gebruikt. Voor het rechterlid hierin mogen we naar believen schrijven

$$\lambda\,(a_1\,b_1)\,\boldsymbol{\delta}+\lambda\,(a_1\,b_2+a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = (\lambda\,a_1)\,b_1\,\boldsymbol{\delta}+((\lambda\,a_1)\,b_2+(\lambda\,a_2)\,b_1)\;\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda\,\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\beta}\,,$$

of ook

$$\lambda\,(a_1\,b_1)\,\boldsymbol{\delta}+\lambda\,(a_1\,b_2+a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = a_1\,(\lambda\,b_1)\,\boldsymbol{\delta}+(a_1(\lambda\;b_2)+a_2(\lambda\;b_1))\;\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\alpha}\,(\lambda\,\boldsymbol{\beta})\,.$$

$(2\frac{1}{2})$ **a5.** Laat zien dat $\boldsymbol{\delta} \in D$ het *unieke* eenheidselement t.a.v. de vermenigvuldiging is.

Stel $\boldsymbol{\eta} = h_1\,\boldsymbol{\delta}+h_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$ is een eenheidselement met de eigenschap $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ voor alle $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon}$. Uitwerken van de relatie $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha}$ levert het volgende (merk op dat in dit geval automatisch voldaan is aan $\boldsymbol{\eta}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$ o.g.v. a6):

$$(a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(h_1\,\boldsymbol{\delta}+h_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = a_1\,h_1\,\boldsymbol{\delta}+(a_1\,h_2+a_2\,h_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = a_1\,\boldsymbol{\delta}+a_2\,\boldsymbol{\epsilon}\,.$$

Gevolg:

$$a_1\,h_1 = a_1 \quad \text{en} \quad a_1\,h_2+a_2\,h_1 = a_2 \quad \text{voor alle } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Hieruit los je $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ eenvoudig op: $h_1 = 1$ en $h_2 = 0$, dus $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\delta}$.

$(2\frac{1}{2})$ **a6.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in D$ geldt $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}$.

Stel wederom $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}$ en $\boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}$, dan

$$\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = (a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = a_1\,b_1\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = b_1\,a_1\,\boldsymbol{\delta} + (b_1\,a_2 + b_2\,a_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = (b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}\,.$$

We definiëren de volgende deelverzameling $I \subset D$ van D (hierin is $0 \in D$ de nulvector):

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\alpha} \in D\backslash\{0\} \mid \text{er bestaat een } \boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\} \text{ zodanig dat } \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}\}\ .$$

(5) **b.** Bepaal I expliciet, d.w.z. geef de voorwaarden op $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\delta} + a_2\boldsymbol{\epsilon} \in I$.

Stel $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in I$, dus er bestaat een $\boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}$ met $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, zodanig dat

$$(a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = (a_1\,b_1)\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\delta}\,.$$

Dit kun je herschrijven tot het volgende lineaire stelsel:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De vraag luidt onder welke voorwaarden op de matrix van coëfficiënten dit stelsel inverteerbaar is. Dit is het geval als de determinant ongelijk nul is, dus $a_1^2 \neq 0$, d.e.s.d.a. $a_1 \neq 0$. Conclusie:

$$I = \{\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D \mid a_1 \neq 0\}\ .$$

We definiëren de volgende deelverzameling $N \subset D$ van D:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\alpha} \in D\backslash\{0\} \mid \text{er bestaat een } \boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\} \text{ zodanig dat } \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = 0\}\ .$$

N.B. Een element $\boldsymbol{\nu} \in N$ wordt ook wel een *nuldeler* van D genoemd.

(5) **c.** Bepaal N expliciet.

Stel $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in N$, dus er bestaat een $\boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}$ met $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, zodanig dat

$$(a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon})\,(b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon}) = (a_1\,b_1)\,\boldsymbol{\delta} + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\boldsymbol{\epsilon} = 0\,.$$

Dit kun je herschrijven tot het volgende lineaire stelsel:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De vraag luidt onder welke voorwaarden op de matrix van coëfficiënten dit stelsel een niet-triviale oplossing $(b_1, b_2) \neq (0,0)$ heeft. Dit is het geval als de determinant nul is, dus $a_1^2 = 0$, d.e.s.d.a. $a_1 = 0$. Conclusie:

$$N = \{\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D \mid a_1 = 0\}\ .$$

(5) **d** Bewijs $N \cap I = \emptyset$.
(*Hint:* Stel $\boldsymbol{\alpha} \in I$, beschouw de vergelijking $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = 0$ en vermenigvuldig deze linkszijdig met $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$.)

De hint is overbodig als je de expliciete karakterisaties van I en N uit onderdelen b en c hebt. In dat geval is het evident dat $N \cap I = \emptyset$ (immers als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in N \cap I$, dan $a_1 \neq 0$ en $a_1 = 0$: tegenspraak). Los van onderdelen b en c kun je de hint volgen. Stel $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta} = b_1\,\boldsymbol{\delta} + b_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$. Omdat $\boldsymbol{\alpha} \in I$ heeft $\boldsymbol{\alpha}$ een inverse, zeg $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$, zodanig dat $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \boldsymbol{\delta}$. Voorts, omdat ook geldt $\boldsymbol{\alpha} \in N$ bestaat er een $\boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\}$, zodanig dat

$$\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = 0\,.$$

Links vermenigvuldigen met $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ levert (haakjes mogen we weglaten o.g.v. associativiteit)

$$0 = \boldsymbol{\alpha}^{-1}\,\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\,.$$

Dit is in tegenspraak met het feit dat $\boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\}$.

Vanwege bovenstaande eigenschappen mogen we D opvatten als een uitbreiding van de reële getallenlijn, $\mathbb{R}$, tot de verzameling van zogenaamde "duale getallen", $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\,\epsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}\ .$$

Hierin is $\epsilon \notin \mathbb{R}$ een uniek toegevoegd element met de eigenschap

$$\epsilon^2 = 0 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Door $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$ te identificeren met $\alpha = a_1 + a_2\,\epsilon \in \mathbb{D}$ "erft" $\mathbb{D}$ de algebraïsche structuur van D en gelden voor vermenigvuldiging op $\mathbb{D}$ de "gebruikelijke" rekenregels[1]:

$$(a_1 + a_2\,\epsilon)\,(b_1 + b_2\,\epsilon) = a_1\,a_2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\epsilon + a_2\,b_2\,\epsilon^2 = a_1\,b_1 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\epsilon\,, \tag{3}$$

vergelijk (1) en (2–3). In het bijzonder identificeren we de basisvectoren $\{\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ van D dus met de duale eenheidsgetallen $\{1, \epsilon\}$ van $\mathbb{D}$.

Analytische functies met domein $\mathbb{R}$ kunnen gedefinieerd worden bij de gratie van hun Taylorreeks, d.w.z. als $f \in C^\omega(\mathbb{R})$, dan

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0)\,x^n\,.$$

Deze definitie is bruikbaar voor uitbreiding van het domein naar $\mathbb{D}$.

(5) **e.** Stel $z = x + y\,\epsilon \in \mathbb{D}$, met $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $z^n = x^n + n\,x^{n-1}\,y\,\epsilon$. (*Hint:* Binomium van Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k$.)

De hint volgend vind je

$$z^n = (x + y\,\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\,y^k\,\epsilon^k \stackrel{*}{=} \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\,y\,\epsilon = x^n + n\,x^{n-1}\,y\,\epsilon\,,$$

waarbij in $*$ gebruikt is dat $\epsilon^k = 0$ voor alle $k = 2, \ldots, n$.

(5) **f.** Notatie als in e. Bewijs dat voor de uitgebreide exponentiële functie $\exp : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ geldt

$$\exp(z) = \exp(x)\,\exp(y\,\epsilon) \quad \text{waarbij} \quad \exp(y\,\epsilon) = 1 + y\,\epsilon\,.$$

[1] Vergelijk de constructie van $\mathbb{D}$ met die van $\mathbb{C}$ waaraan we een element $i \notin \mathbb{R}$ met $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ toevoegen tezamen met een natuurlijke algebraïsche structuur voor vermenigvuldiging.

We definiëren, voor $z = x + y\,\epsilon \in \mathbb{D}$ als voorheen,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \stackrel{\text{e}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x^n + n\,x^{n-1}\,y\,\epsilon\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + y\,\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \,.$$

Substitutie van dummy index in de tweede sommatie $n' = n - 1$ (waarna we het accentje van de nieuwe dummy n' weer achterwege laten) levert

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + y\,\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x)\,\left(1 + y\,\epsilon\right) \,.$$

De tweede factor is inderdaad

$$\exp(y\,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n\,\epsilon^n = 1 + y\,\epsilon \,,$$

o.g.v. eerder genoemd argument, dus we concluderen

$$\exp(z) = \exp(x)\,\exp(y\,\epsilon) \,.$$

(*20*) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie voor $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx \,.$$

Bijgevolg geldt voor de inverse:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega \,.$$

Hierin identificeren we slordigheidshalve een reguliere getemperde distributie f met zijn Riesz representant ("functie onder de integraal") met functievoorschrift $f(x)$. De Dirac δ-distributie wordt geïdentificeerd met de "Dirac delta functie" met "functievoorschrift" $\delta(x)$.

(5) **a.** Gegeven $\widehat{f}(\omega) = \delta(\omega - a)$ voor een of andere constante $a \in \mathbb{R}$. Bepaal $f(x)$.

Substitutie in de definitie van de inverse Fouriertransformatie geeft

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - a)\,e^{i\omega x}\,d\omega \stackrel{*}{=} \frac{e^{iax}}{2\pi} \,.$$

In de laatste stap $*$ is de definitie van de Dirac delta functie gebruikt.

(5) **b.** Gegeven $g(x) = 2\cos^2 x$. (Met $\cos^2 x$ bedoelen we $(\cos x)^2$.) Bepaal $\widehat{g}(\omega)$.
(*Hint:* Je kunt je resultaat controleren met behulp van onderdeel a.)

Merk op dat $g(x) = 2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$. Dus

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos(2x) + 1\right)\,e^{-i\omega x}\,dx \,.$$

Nu is

$$\cos(2x) = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \,,$$

zodat

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-i(\omega-2)x} + \frac{1}{2} e^{-i(\omega+2)x} + e^{-i\omega x}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-2)x}\,dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+2)x}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\,dx \\ &= \pi\,\delta(\omega - 2) + \pi\,\delta(\omega + 2) + 2\pi\,\delta(\omega) \,. \end{aligned}$$

Check, via a:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\pi\,\delta(\omega-2)+\pi\,\delta(\omega+2)+2\pi\,\delta(\omega)\right)\, e^{i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-2)\, e^{i\omega x}\, d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+2)\, e^{i\omega x}\, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2}e^{2ix} + \frac{1}{2}e^{-2ix} + 1 = \cos(2x) + 1 = g(x)\,.
\end{aligned}
$$

In het volgende onderdeel mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \sqrt{\pi} \quad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}.$$

(5) **c.** Gegeven $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$. Bepaal $\widehat{\phi}(\omega)$.

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-i\omega x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-i\omega x}\, dx = e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{1}{2}i\omega)^2}\, dx \overset{*}{=} e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\,.$$

In de laatste stap $*$ is gebruik gemaakt van de standaardintegraal.

(5) **d.** Gegeven $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^2 x\, e^{-x^2}$. Bepaal $\widehat{h}(\omega)$.
(*Hint:* Merk op dat $h = g\,\phi$.)

Met behulp van de hint bepalen we

$$
\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \widehat{(g\,\phi)}(\omega) \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi}\,(\widehat{g} * \widehat{\phi})(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega')\, \widehat{\phi}(\omega-\omega')\, d\omega' \\
&\overset{\text{b}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\pi\,\delta(\omega'-2)+\pi\,\delta(\omega'+2)+2\pi\,\delta(\omega')\right)\, \widehat{\phi}(\omega-\omega')\, d\omega' \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{2}\,\widehat{\phi}(\omega-2) + \frac{1}{2}\,\widehat{\phi}(\omega+2) + \widehat{\phi}(\omega) \overset{\text{c}}{=} \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{4}(\omega-2)^2} + \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{4}(\omega+2)^2} + e^{-\frac{1}{4}\omega^2}\,.
\end{aligned}
$$

Bij $*$ is een bekende stelling toegepast m.b.t. Fouriertransformatie van een product van twee functies. Bij $\star$ is de definitie van de Dirac delta functie gebruikt.

(5) **4.** Bewijs dat voor de Dirac functie op domein $\mathbb{R}^n$ geldt

$$\delta(Ax+b) = \frac{1}{|\det A|}\,\delta(x + A^{-1}b)\,.$$

Hierin is A een vastgekozen, inverteerbare matrix, $x \in \mathbb{R}^n$ de n-dimensionale variabele, en $b \in \mathbb{R}^n$ constant.
(*Hint:* Noem de distributie die bij het linkerlid hoort $\delta_{A,b} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, evalueer $\delta_{A,b}[\phi]$ voor willekeurige $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en gebruik de methode van substitutie van variabelen.)

De hint volgend bekijken we, voor willekeurige $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$
\begin{aligned}
\delta_{A,b}[\phi] &\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(Ax+b)\,\phi(x)\, dx \overset{*}{=} \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(y)\,\phi(A^{-1}(y-b))\, dy \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{|\det A|}\,\phi(-A^{-1}b) \overset{\star}{=} \frac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x+A^{-1}b)\,\phi(x)\, dx\,.
\end{aligned}
$$

Bij $*$ is de volgende substitutie van variabelen toegepast: $y = Ax + b$, dus $x = A^{-1}(y-b)$ en $dy = |\det A|\, dx$ bij ongewijzigde integratiegrenzen. Bij $\star$ is de definitie van de Dirac delta functie toegepast. Uit de vergelijking lezen we af:

$$\delta(Ax+b) = \frac{1}{|\det A|}\,\delta(x+A^{-1}b)\,.$$

EINDE