HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: 21 maart 2007. Tijd: 14:00-17:00. Plaats: AUD 15.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** Met $\mathbb{M}_n$ duiden we de verzameling van alle reëelwaardige $n \times n$ matrices aan. Waar in de rest van deze opgave gesproken wordt over "lineaire ruimte" bedoelen we steeds *reële* lineaire ruimte, d.i. een lineaire ruimte over het scalairlichaam $\mathbb{R}$.

(5) **a.** Door op geschikte wijze een vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren mogen we $\mathbb{M}_n$ opvatten als een lineaire ruimte. Geef aan hoe de "gebruikelijke" vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $\mathbb{M}_n$ gedefinieerd is.

Een *reële kwadratische vorm* op een lineaire ruimte V wordt gedefinieerd als een afbeelding $Q : V \to \mathbb{R} : v \mapsto Q(v)$, met de volgende eigenschappen:

- voor alle $v \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$, en
- de afbeelding $B_Q : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto Q(v + w) - Q(v) - Q(w)$ is bilineair.

Hieronder bekijken we de volgende afbeelding:

$$Q_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : v \mapsto Q_M(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \, M_{ij} \, v_j \quad \text{voor vast gekozen } M \in \mathbb{M}_n.$$

(5) **b.** Bewijs dat Q_M een reële kwadratische vorm op $\mathbb{R}^n$ is voor elke $M \in \mathbb{M}_n$.

$M \in \mathbb{M}_n$ heet *positief definiet* indien voor de bijbehorende kwadratische vorm geldt

$$Q_M(v) > 0 \quad \text{voor alle } v \in \mathbb{R}^n \text{ ongelijk aan de nulvector.}$$

Kortheidshalve duiden we met $\mathbb{M}_n^+ \subset \mathbb{M}_n$ de verzameling van alle positief definiete $M \in \mathbb{M}_n$ aan.

(5) **c.** Bewijs dat $\mathbb{M}_n^+$ géén lineaire (deel)ruimte is.

d. Stel $M \in \mathbb{M}_n^+$.

$(2\frac{1}{2})$ **d1.** Laat aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zien dat elementen M_{ij} van M negatief kunnen zijn.
(*Hint:* Beperk je tot het geval $M \in \mathbb{M}_2^+$.)

$(2\frac{1}{2})$ **d2.** Laat zien dat $M \in \mathbb{M}_n^+$ impliceert $M_{ii} > 0$ voor alle $i \in 1, \ldots, n$.

Gegeven de lineaire ruimten V en W. Met $\mathscr{L}(V, W)$ duiden we de verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W aan. We mogen $\mathscr{L}(V, W)$ zelf ook weer opvatten als een lineaire ruimte door op geschikte wijze een vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren.

(5) **e.** Geef aan hoe we een "voor de hand liggende" vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $\mathscr{L}(V, W)$ kunnen definiëren.

f. Aangezien $\mathscr{L}(V, W)$ opgevat mag worden als lineaire ruimte, kunnen we naar believen ingewikkeldere lineaire ruimten construeren, zoals $\mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Met $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ bedoelen we de lineaire ruimte van gladde, reëelwaardige functies op $\mathbb{R}^n$.

$(2\frac{1}{2})$ **f1.** Hoe is vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging op $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gedefinieerd?

Beschouw vervolgens de afbeelding $L : \mathbb{M}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, gegeven door

$$L : \mathbb{M}_n \to C^\infty(\mathbb{R}^n) : M \mapsto Q_M \quad \text{met } Q_M \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ als in onderdeel a.}$$

$(2\frac{1}{2})$ **f2.** Laat zien dat $L \in \mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Een afbeelding $A \in \mathscr{L}(V, W)$ heet *injectief* indien $A(v_1) = A(v_2)$ impliceert $v_1 = v_2$ $(v_1, v_2 \in V)$.

(5) **g.** Is $L \in \mathscr{L}(\mathbb{M}_n, C^\infty(\mathbb{R}^n))$ uit onderdeel f injectief? Bewijs je antwoord.
(*Hint:* Toon aan dat we in de definitie van Q_M zonder verlies van algemeenheid mogen stellen dat M symmetrisch is, m.a.w. $M_{ij} = M_{ji}$ voor alle $i, j, \ldots, n$.)

(*40*) **2.** We construeren een 2-dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, opgespannen door de basis $\{\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\epsilon}\}$,

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1\, \boldsymbol{\delta} + a_2\, \boldsymbol{\epsilon} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \,,$$

voorzien van de gebruikelijke definitie voor optelling en scalairvermenigvuldiging, dat wil zeggen, als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\, \boldsymbol{\delta} + a_2\, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta} = b_1\, \boldsymbol{\delta} + b_2\, \boldsymbol{\epsilon} \in D$, met $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, en $\lambda \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} &\stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1)\, \boldsymbol{\delta} + (a_2 + b_2)\, \boldsymbol{\epsilon}\,, \\ \lambda\, \boldsymbol{\alpha} &\stackrel{\text{def}}{=} (\lambda\, a_1)\, \boldsymbol{\delta} + (\lambda\, a_2)\, \boldsymbol{\epsilon}\,. \end{aligned}$$

Vervolgens voorzien we de aldus verkregen lineaire ruimte D van een algebraïsche structuur middels de volgende "vermenigvuldigingsregel": Als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\, \boldsymbol{\delta} + a_2\, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\beta} = b_1\, \boldsymbol{\delta} + b_2\, \boldsymbol{\epsilon} \in D$, dan

$$\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} a_1\, b_1\, \boldsymbol{\delta} + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\; \boldsymbol{\epsilon}\,. \tag{1}$$

a. Toon aan dat D aldus gedefinieerd een *commutatieve algebra met identiteit* vormt. Ga als volgt te werk:

$(2\frac{1}{2})$ **a1.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $(\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{\beta})\, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\, (\boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{\gamma})$.

($2\frac{1}{2}$) **a2.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma}$.

($2\frac{1}{2}$) **a3.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in D$ geldt $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\gamma}$.

($2\frac{1}{2}$) **a4.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in D$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\lambda\,(\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}) = (\lambda\,\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}\,(\lambda\,\boldsymbol{\beta})$.

($2\frac{1}{2}$) **a5.** Laat zien dat $\boldsymbol{\delta} \in D$ het *unieke* eenheidselement t.a.v. de vermenigvuldiging is.

($2\frac{1}{2}$) **a6.** Laat zien dat voor alle $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in D$ geldt $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\,\boldsymbol{\alpha}$.

We definiëren de volgende deelverzameling $I \subset D$ van D (hierin is $0 \in D$ de nulvector):

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\alpha} \in D\backslash\{0\} \mid \text{er bestaat een } \boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\} \text{ zodanig dat } \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\delta}\}\ .$$

(5) **b.** Bepaal I expliciet, d.w.z. geef de voorwaarden op $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ als $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\delta} + a_2\boldsymbol{\epsilon} \in I$.

We definiëren de volgende deelverzameling $N \subset D$ van D:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{\alpha} \in D\backslash\{0\} \mid \text{er bestaat een } \boldsymbol{\beta} \in D\backslash\{0\} \text{ zodanig dat } \boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = 0\}\ .$$

N.B. Een element $\boldsymbol{\nu} \in N$ wordt ook wel een *nuldeler* van D genoemd.

(5) **c.** Bepaal N expliciet.

(5) **d** Bewijs $N \cap I = \emptyset$.
(*Hint:* Stel $\boldsymbol{\alpha} \in I$, beschouw de vergelijking $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} = 0$ en vermenigvuldig deze linkszijdig met $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$.)

Vanwege bovenstaande eigenschappen mogen we D opvatten als een uitbreiding van de reële getallenlijn, $\mathbb{R}$, tot de verzameling van zogenaamde "duale getallen", $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b\,\epsilon \mid a, b \in \mathbb{R}\}\ .$$

Hierin is $\epsilon \notin \mathbb{R}$ een uniek toegevoegd element met de eigenschap

$$\epsilon^2 = 0 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Door $\boldsymbol{\alpha} = a_1\,\boldsymbol{\delta} + a_2\,\boldsymbol{\epsilon} \in D$ te identificeren met $\alpha = a_1 + a_2\,\epsilon \in \mathbb{D}$ "erft" $\mathbb{D}$ de algebraïsche structuur van D en gelden voor vermenigvuldiging op $\mathbb{D}$ de "gebruikelijke" rekenregels[1]:

$$(a_1 + a_2\,\epsilon)\,(b_1 + b_2\,\epsilon) = a_1\,a_2 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\epsilon + b_1\,b_2\,\epsilon^2 = a_1\,b_1 + (a_1\,b_2 + a_2\,b_1)\,\epsilon\,, \tag{3}$$

vergelijk (1) en (2–3). In het bijzonder identificeren we de basisvectoren $\{\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\epsilon}\}$ van D dus met de duale eenheidsgetallen $\{1, \epsilon\}$ van $\mathbb{D}$.

Analytische functies met domein $\mathbb{R}$ kunnen gedefinieerd worden bij de gratie van hun Taylorreeks, d.w.z. als $f \in C^\omega(\mathbb{R})$, dan

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(0)\,x^n\,.$$

Deze definitie is bruikbaar voor uitbreiding van het domein naar $\mathbb{D}$.

(5) **e.** Stel $z = x + y\,\epsilon \in \mathbb{D}$, met $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $z^n = x^n + n\,x^{n-1}\,y\,\epsilon$.
(*Hint:* Binomium van Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k$.)

(5) **f.** Notatie als in e. Bewijs dat voor de uitgebreide exponentiële functie $\exp : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ geldt

$$\exp(z) = \exp(x)\,\exp(y\,\epsilon) \quad \text{waarbij} \quad \exp(y\,\epsilon) = 1 + y\,\epsilon\,.$$

(*20*) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie voor $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx\,.$$

Bijgevolg geldt voor de inverse:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega\,.$$

Hierin identificeren we slordigheidshalve een reguliere getemperde distributie f met zijn Riesz representant ("functie onder de integraal") met functievoorschrift $f(x)$. De Dirac δ-distributie wordt geïdentificeerd met de "Dirac delta functie" met "functievoorschrift" $\delta(x)$.

(5) **a.** Gegeven $\widehat{f}(\omega) = \delta(\omega - a)$ voor een of andere constante $a \in \mathbb{R}$. Bepaal $f(x)$.

(5) **b.** Gegeven $g(x) = 2\cos^2 x$. (Met $\cos^2 x$ bedoelen we $(\cos x)^2$.) Bepaal $\widehat{g}(\omega)$.
(*Hint:* Je kunt je resultaat controleren met behulp van onderdeel a.)

In het volgende onderdeel mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}.$$

(5) **c.** Gegeven $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}$. Bepaal $\widehat{\phi}(\omega)$.

(5) **d.** Gegeven $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cos^2 x\,e^{-x^2}$. Bepaal $\widehat{h}(\omega)$.
(*Hint:* Merk op dat $h = g\,\phi$.)

(*5*) **4.** Bewijs dat voor de Dirac functie op domein $\mathbb{R}^n$ geldt

$$\delta(Ax + b) = \frac{1}{|\det A|}\,\delta(x + A^{-1}b)\,.$$

Hierin is A een vastgekozen, inverteerbare matrix, $x \in \mathbb{R}^n$ de n-dimensionale variabele, en $b \in \mathbb{R}^n$ constant.
(*Hint:* Noem de distributie die bij het linkerlid hoort $\delta_{A,b} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, evalueer $\delta_{A,b}[\phi]$ voor willekeurige $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en gebruik de methode van substitutie van variabelen.)

EINDE

[1] Vergelijk de constructie van $\mathbb{D}$ met die van $\mathbb{C}$ waaraan we een element $i \notin \mathbb{R}$ met $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ toevoegen tezamen met een natuurlijke algebraïsche structuur voor vermenigvuldiging.