HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: woensdag 28 juni 2006. Tijd: 14:00–17:00. Plaats: HG 10.01 C.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*20*) **1.** In deze opgave gaan we uit van een vectorruimte V over het scalairlichaam $\mathbb{R}$, voorzien van een reëelwaardig inprodukt, $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v|w\rangle$. In de rest van deze opgave bedoelen we met "inprodukt" telkens *reëelwaardig* inprodukt.

Lemma. Voor elk tweetal vectoren $v, w \in V$ geldt de volgende *ongelijkheid van Schwartz*:

$$|\langle v|w\rangle| \leq \sqrt{\langle v|v\rangle\,\langle w|w\rangle}\,.$$

(5) **a.** Bewijs dit lemma, gebruik makend van de definiërende eigenschappen van het inprodukt. (*Hint:* Beschouw de triviale ongelijkheid $\langle \lambda v + w|\lambda v + w\rangle \geq 0$ voor gegeven $v, w \in V$ en willekeurige $\lambda \in \mathbb{R}$. Waarom is deze ongelijkheid overigens "triviaal"?)

De ongelijkheid $\langle \lambda v + w|\lambda v + w\rangle \geq 0$ geldt trivialiter, omdat een inprodukt per definitie niet-negatief definiet is op V. Gebruik makend van bilineariteit en symmetrie kan de ongelijkheid herschreven worden als

$$\langle v|v\rangle\lambda^2 + 2\langle v|w\rangle\lambda + \langle w|w\rangle \geq 0\,.$$

Het linkerlid is kennelijk een niet-negatieve kwadratische functie in $\lambda \in \mathbb{R}$ (de bijbehorende grafiek is een dalparabool die de λ-as in hooguit één punt raakt). De discriminant hiervan kan dus niet positief zijn, d.w.z.

$$4\langle v|w\rangle^2 - 4\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle \leq 0\,.$$

Hieruit volgt onmiddellijk de ongelijkheid van Schwartz.

Stelling. Elk inprodukt $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ induceert een norm, $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$, als volgt:

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v|v\rangle}\,.$$

We noemen deze norm de *door het inprodukt geïnduceerde norm.*

(5) **b.** Bewijs deze stelling, gebruik makend van de definiërende eigenschappen van het inprodukt.

1. Voor willekeurige $v \in V$ geldt $\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v|v\rangle} \geq 0$, waarbij de ongelijkheid volgt uit het feit dat voor elk inprodukt geldt $\langle v|v\rangle \geq 0$. Bovendien geldt gelijkheid dan en slechts dan als $v = 0 \in V$ op grond van niet-ontaardheid van het inprodukt.

2. Voor willekeurige $v \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt $\|\lambda v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \lambda v|\lambda v\rangle} \stackrel{*}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle v|v\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v|v\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} |\lambda| \|v\|$. De identiteit $*$ volgt uit bilineariteit van het inprodukt.

3. Voor alle $v, w \in V$ geldt $\|v+w\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle v+w|v+w\rangle \stackrel{*}{=} \langle v|v\rangle + 2\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle \stackrel{\star}{\leq} \langle v|v\rangle + 2\sqrt{\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle} + \langle w|w\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$. Derhalve geldt $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van bilineariteit en symmetrie van het inprodukt en bij $\star$ van de ongelijkheid van Schwartz.

(5) **c.** Bewijs dat voor alle $v, w \in V$ geldt

$$\frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 = \langle v|w\rangle \,.$$

Gebruik makend van de definitie van de door het inprodukt geïnduceerde norm en van bilineariteit en symmetrie van het inprodukt kunnen we het linkerlid als volgt herschrijven:

$$\frac{1}{4}\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\|v-w\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\langle v+w|v+w\rangle - \frac{1}{4}\langle v-w|v-w\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle v|v\rangle + 2\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle\right) - \frac{1}{4}\left(\langle v|v\rangle - 2\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle\right) = \langle v|w\rangle \,.$$

(5) **d.** Bewijs dat voor alle $v, w \in V$ geldt

$$\frac{1}{2}\|v+w\|^2 + \frac{1}{2}\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \,.$$

Analoog aan voorgaand onderdeel herschrijven we de termen in het linkerlid als volgt:

$$\|v \pm w\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle v \pm w|v \pm w\rangle = \langle v|v\rangle \pm 2\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle \,.$$

Nemen we het gemiddelde van de "+" en "−" termen, dan vallen de mengtermen weg:

$$\frac{1}{2}\|v+w\|^2 + \frac{1}{2}\|v-w\|^2 = \langle v|v\rangle + \langle w|w\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|^2 + \|w\|^2 \,.$$

♣

(*20*) **2.** Zij V de lineaire ruimte van alle reëelwaardige 2×2 matrices:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle|\, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\} .$$

De getransponeerde $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ van een matrix $\mathbf{A} \in V$ is de matrix die verkregen wordt door coëfficiënten te spiegelen in de hoofddiagonaal, dus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Verder definiëren we $\operatorname{tr} \mathbf{A}$, het spoor ("*trace*") van $\mathbf{A} \in V$, als de som der diagonaalelementen:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} \,.$$

We bekijken nu de vorm $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle$ gegeven door $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\right)$.

Bewijs dat deze vorm een reëel inprodukt definiëert, of geef een tegenvoorbeeld indien dit niet het geval is.
(*Hint:* Schrijf $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle$ eerst uit in matrixcomponenten a_{ij} en b_{kl}, $i, j, k, l = 1, 2$.)

In onderstaand bewijs zijn $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ willekeurige matrices in V, en $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ willekeurige getallen. Merk op dat, uitgeschreven in matrixcomponenten,

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ki} b_{kj} \quad \text{zodat} \quad \langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}\,.$$

Hierin is a_{ij} en b_{ij} de component van $\mathbf{A}$ respectievelijk $\mathbf{B}$ op de i-de rij en j-de kolom.

1. $\langle \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}|\mathbf{C}\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{2} (\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B})_{ij}\, c_{ij} \overset{*}{=} \sum_{i,j=1}^{2} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})\, c_{ij} = \lambda \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} c_{ij} + \mu \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \lambda\langle \mathbf{A}|\mathbf{C}\rangle + \mu\langle \mathbf{B}|\mathbf{C}\rangle$. Bij $*$ is de definitie van scalairvermenigvuldiging en optelling voor matrices gebruikt.
2. $\langle \mathbf{A}|\lambda\mathbf{B} + \mu\mathbf{C}\rangle \overset{3}{=} \langle \lambda\mathbf{B} + \mu\mathbf{C}|\mathbf{A}\rangle \overset{1}{=} \lambda\langle \mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle + \mu\langle \mathbf{C}|\mathbf{A}\rangle \overset{3}{=} \lambda\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle + \mu\langle \mathbf{A}|\mathbf{C}\rangle$. (Het bewijs van onderdeel 3 maakt geen gebruik van onderdeel 2.)
3. $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} a_{ij} \overset{\text{def}}{=} \langle \mathbf{B}|\mathbf{A}\rangle$.
4. $\langle \mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} a_{ij} \geq 0$ (som van kwadraten van reële getallen). Gelijkheid impliceert dat elke term afzonderlijk 0 moet zijn, dus $a_{ij} = 0$ voor alle $i, j = 1, 2$, dus $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (de nulmatrix).

♣

(*25*) **3.** We definiëren de volgende grijswaardentransformatie: $T_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto T_\gamma(s) \overset{\text{def}}{=} e^{\gamma s}$. Hierin is $\gamma \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante. We voorzien de verzameling van alle transformaties van dit type, $G = \{T_\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$, van een infix vermenigvuldigingsoperator $\times$ als volgt:

$$(T_\alpha \times T_\beta)\,(s) \overset{\text{def}}{=} T_\alpha(s)\, T_\beta(s) \quad \text{voor alle } s \in \mathbb{R}.$$

a. Bewijs dat G een groep vormt. Ga als volgt te werk:

(5) **a1.** Bewijs dat G gesloten is ten aanzien van de vermenigvuldiging, d.w.z. bewijs dat $T_\alpha, T_\beta \in G$ impliceert $T_\alpha \times T_\beta \in G$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Stel $T_\alpha(s) = e^{\alpha s}$, $T_\beta(s) = e^{\beta s}$ dan geldt $\left(T_\alpha \times T_\beta\right)(s) \overset{\text{def}}{=} T_\alpha(s)\, T_\beta(s) \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha s} e^{\beta s} = e^{(\alpha+\beta)s} \overset{\text{def}}{=} T_{\alpha+\beta}(s)$ voor alle $s \in \mathbb{R}$, dus $T_\alpha \times T_\beta = T_{\alpha+\beta} \in G$.

(5) **a2.** Bewijs dat vermenigvuldiging op G associatief is, d.w.z. bewijs dat $(T_\alpha \times T_\beta) \times T_\gamma = T_\alpha \times (T_\beta \times T_\gamma)$ voor alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Gebruik makend van het bewijs van het vorige onderdeel volgt $(T_\alpha \times T_\beta) \times T_\gamma \overset{\text{a1}}{=} T_{\alpha+\beta} \times T_\gamma \overset{\text{a1}}{=} T_{(\alpha+\beta)+\gamma} = T_{\alpha+\beta+\gamma} = T_{\alpha+(\beta+\gamma)} \overset{\text{a1}}{=} T_\alpha \times T_{\beta+\gamma} \overset{\text{a1}}{=} T_\alpha \times (T_\beta \times T_\gamma)$ voor alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(5) **a3.** Bewijs dat G een eenheidselement heeft, d.w.z. dat er een $\nu \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat

$T_\nu \times T_\gamma = T_\gamma \times T_\nu = T_\gamma$ voor alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Geef ook de expliciete waarde van $\nu \in \mathbb{R}$ die hoort bij dit eenheidselement $T_\nu \in G$.

Het eenheidselement is $T_0 \in G$, immers $T_\alpha \times T_0 \stackrel{\text{a1}}{=} T_{\alpha+0} = T_\alpha$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Evenzo geldt $T_0 \times T_\alpha \stackrel{\text{a1}}{=} T_{0+\alpha} = T_\alpha$. Hierin verwijst "a1" wederom naar het bewijs bij onderdeel a1. Een rechtstreeks bewijs gaat als volgt: $T_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ voor alle $s \in \mathbb{R}$, dus $(T_\alpha \times T_0)(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\alpha(s) T_0(s) = e^{\alpha s} \cdot 1 = e^{\alpha s} = T_\alpha(s)$ en analoog $(T_0 \times T_\alpha)(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_0(s) T_\alpha(s) = 1 \cdot e^{\alpha s} = e^{\alpha s} = T_\alpha(s)$ voor alle $s \in \mathbb{R}$.

(5) **a4.** Bewijs tenslotte dat elk element van G een inverse heeft, d.w.z. dat er voor elke $\eta \in \mathbb{R}$ een $\theta \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $T_\eta \times T_\theta = T_\theta \times T_\eta = T_\nu$, waarin $\nu \in \mathbb{R}$ staat voor de parameterwaarde die correspondeert met het eenheidselement uit onderdeel a3.

We hebben al gezien dat $\nu = 0$. Voor willekeurige $\eta \in \mathbb{R}$ geldt dat de inverse van T_η gegeven wordt door $T_{-\eta} \in G$, immers $T_\eta \times T_{-\eta} \stackrel{\text{a1}}{=} T_{\eta+(-\eta)} = T_0$ en dito $T_{-\eta} \times T_\eta \stackrel{\text{a1}}{=} T_{(-\eta)+\eta} = T_0$.

(5) **b.** Is G commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Dat G commutatief is is in feite al in het bewijs bij onderdeel a1 aangetoond, immers $T_\alpha \times T_\beta \stackrel{\text{a1}}{=} T_{\alpha+\beta} = T_{\beta+\alpha} = T_\beta \times T_\alpha$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

♣

(*15*) **4.** Beschouw de afbeelding, $\theta_t : C(\mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R}_0^+) \to \mathbb{R} : f \mapsto \theta_t(f)$, gegeven door

$$\theta_t(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(x)\, e^{-x\,t} dx \quad \text{voor willekeurige, vast gekozen } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

(5) **a.** Laat zien dat er een $M > 0$ onafhankelijk van t bestaat zodanig dat $|\theta_t(f)| \leq M < \infty$. (*Hint:* Gebruik de ongelijkheid van Hölder.)

Definieer gemakshalve $\phi_t : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \phi_t(x) = e^{-xt}$ met parameter $t \in \mathbb{R}_0^+$. Met behulp van de ongelijkheid van Hölder $(*)$ volgt

$$|\theta_t(f)| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_0^\infty f(x)\, \phi_t(x) dx \right| \leq \int_0^\infty |f(x)\, \phi_t(x)|\, dx = \|f\, \phi_t\|_1 \stackrel{*}{\leq} \|f\|_1\, \|\phi_t\|_\infty \stackrel{\star}{=} \|f\|_1 \stackrel{\circ}{<} \infty\,.$$

Hierin is $\|\ \|_p$ the p-norm op $L^p(\mathbb{R}_0^+)$, $1 \leq p \leq \infty$. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van het feit dat de sup-norm voor ϕ_t ($t \in \mathbb{R}_0^+$ vast gekozen) gegeven wordt door $\|\phi_t\|_\infty = \max\limits_{x \in \mathbb{R}_0^+} \phi_t(x) = 1$. De ongelijkheid $\circ$ geldt per definitie, aangezien $f \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$.

(10) **b.** Toon aan dat θ_t een lineaire afbeelding is voor elke $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Zij $f, g \in C(\mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R}_0^+)$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan volgt

$$\theta_t(\lambda f + \mu g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty (\lambda f + \mu g)(x)\, e^{-x\,t} dx \stackrel{*}{=} \int_0^\infty (\lambda f(x) + \mu g(x))\, e^{-x\,t} dx \stackrel{\star}{=} \lambda \int_0^\infty f(x)\, e^{-x\,t} dx + \mu \int_0^\infty g(x)\, e^{-x\,t} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \theta_t(f) + \mu \theta_t(g)\,.$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van de definitie van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging voor functies, bij $\star$ van lineariteit van integreren.

♣

(*20*) **5.** Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ middels het functievoorschrift

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}\,.$$

We hanteren de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{met bijgevolg} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

Zonder bewijs geven we de Fouriertransformatie van de functie f_1, namelijk $\widehat{f}_1(\omega) = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}\,(\omega)$. Hierin is $\mathrm{sgn}\,(\omega) = -1$ als $\omega < 0$, $\mathrm{sgn}\,(0) = 0$, en $\mathrm{sgn}\,(\omega) = +1$ als $\omega > 0$.

Het convolutieprodukt van twee functies f en g is gedefinieerd als

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy\,,$$

indien de integraal in het rechterlid bestaat. Als dit niet het geval is, maar de functies f en g wel Fouriertransformeerbaar zijn, hanteren we de volgende *impliciete definitie* voor het convolutieprodukt ($\mathcal{F}(u)$ is hier synoniem voor $\widehat{u}$):

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)\,.$$

(5) **a.** Toon aan dat de functie $\widehat{f_n}$ zuiver imaginair is voor oneven $n \in \mathbb{N}$, en reëel voor even $n \in \mathbb{N}$. (*Hint:* Gebruik de (anti-)symmetrie eigenschap $f_n(x) = (-1)^n\, f_n(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.)

Als $z = a + bi \in \mathbb{C}$ schrijven we de complex geconjugeerde als $z^* = a - bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Voor $\omega \in \mathbb{R}$ willekeurig hebben we

$$\begin{aligned}\widehat{f_n}(\omega) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \stackrel{\text{hint}}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(-x)\, e^{-i\omega x}\, dx \stackrel{*}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)\, e^{i\omega y}\, dy \stackrel{\star}{=} (-1)^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)\, e^{-i\omega y}\, dy \right)^* \\ &= (-1)^n\, \widehat{f}_n^*(\omega)\,.\end{aligned}$$

Bij $*$ is substitutie van variabelen, $x = -y$, gebruikt. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van het feit dat $f_n(y) \in \mathbb{R}$ voor alle $y \in \mathbb{R}$, en van het feit dat $\int_\Omega f^*(x)\, dx = \left(\int_\Omega f(x)\, dx\right)^*$ voor willekeurig integratiedomein $\Omega \subset \mathbb{R}$. Conclusie: Voor even n hebben we $\widehat{f_n}(\omega) = \widehat{f}_n^*(\omega)$, m.a.w. $\widehat{f_n}(\omega) \in \mathbb{R}$. Voor oneven n hebben we $\widehat{f_n}(\omega) = -\widehat{f}_n^*(\omega)$, m.a.w. $\widehat{f_n}(\omega) \in i\mathbb{R}$, d.w.z. zuiver imaginair.

b. Bewijs de volgende recursierelaties voor de functies f_n, respectievelijk $\widehat{f_n}$:

($2\frac{1}{2}$) **b1.** $f_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{n}\, f_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Rechttoe rechtaan differentiëren levert $f_n'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left[x^{-n}\right]' = -n\, x^{-n-1} \stackrel{\text{def}}{=} -n\, f_{n+1}(x)$, waaruit het gestelde volgt.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** $\widehat{f}_{n+1}(\omega) = -\dfrac{1}{n}\, i\omega\, \widehat{f_n}(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

We hebben $\mathcal{F}(f_{n+1})(\omega) \stackrel{*}{=} -\dfrac{1}{n}\, \mathcal{F}(f_n')(\omega) \stackrel{\star}{=} -\dfrac{1}{n}\, i\omega\, \mathcal{F}(f_n)(\omega)$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van onderdeel b1 en van lineariteit van Fouriertransformatie. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van de eigenschap $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$.

(5) **c.** Bepaal $\widehat{f_n}(\omega)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, gegeven het functievoorschrift $\widehat{f}_1(\omega) = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}\,(\omega)$.

Claim (inductiehypothese): $\widehat{f}_n(\omega) = \dfrac{\pi}{i}\, \dfrac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{sgn}(\omega)$. Bewijs middels volledige inductie: Voor $n=1$ komt het resultaat overeen met het gegeven. Verder geldt $\widehat{f}_{n+1}(\omega) \overset{\text{b2}}{=} -\dfrac{1}{n}\, i\omega\, \widehat{f}_n(\omega) \overset{*}{=} -\dfrac{1}{n}\, i\omega\, \dfrac{\pi}{i}\, \dfrac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{sgn}(\omega) = \dfrac{\pi}{i}\, \dfrac{(-i\omega)^n}{n!}\, \mathrm{sgn}(\omega)$. Bij $*$ is de inductiehypothese gebruikt voor $\widehat{f}_n(\omega)$.

(5) **d.** Bewijs: $\widehat{f}_n * \widehat{f}_m = 2\pi\, \widehat{f}_{n+m}$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Het is evident dat $f_n\, f_m = f_{n+m}$ ($\star$), immers voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $f_n(x)\, f_m(x) = x^{-n}\, x^{-m} = x^{-(n+m)} = f_{n+m}(x)$. Gevolg: $\widehat{f}_n * \widehat{f}_m = \mathcal{F}(f_n) * \mathcal{F}(f_m) \overset{*}{=} 2\pi \mathcal{F}(f_n\, f_m) \overset{\star}{=} 2\pi\, \mathcal{F}(f_{n+m}) = 2\pi\, \widehat{f}_{n+m}$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van het feit dat voor twee functies u_1 en u_2 geldt dat, indien linker- en rechterlid bestaan, $\mathcal{F}(u_1\, u_2) = \dfrac{1}{2\pi}\, \mathcal{F}(u_1) * \mathcal{F}(u_2)$. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van de eerste observatie hierboven.

EINDE