HERTENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: woensdag 28 juni 2006. Tijd: 14:00–17:00. Plaats: HG 10.01 C.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 5 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*20*) **1.** In deze opgave gaan we uit van een vectorruimte V over het scalairlichaam $\mathbb{R}$, voorzien van een reëelwaardig inprodukt, $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v|w\rangle$. In de rest van deze opgave bedoelen we met "inprodukt" telkens *reëelwaardig* inprodukt.

Lemma. Voor elk tweetal vectoren $v, w \in V$ geldt de volgende *ongelijkheid van Schwartz*:

$$|\langle v|w\rangle| \leq \sqrt{\langle v|v\rangle\,\langle w|w\rangle}\,.$$

(5) **a.** Bewijs dit lemma, gebruik makend van de definiërende eigenschappen van het inprodukt. (*Hint:* Beschouw de triviale ongelijkheid $\langle \lambda v + w|\lambda v + w\rangle \geq 0$ voor gegeven $v, w \in V$ en willekeurige $\lambda \in \mathbb{R}$. Waarom is deze ongelijkheid overigens "triviaal"?)

Stelling. Elk inprodukt $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ induceert een norm, $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$, als volgt:

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v|v\rangle}\,.$$

We noemen deze norm de *door het inprodukt geïnduceerde norm.*

(5) **b.** Bewijs deze stelling, gebruik makend van de definiërende eigenschappen van het inprodukt.

(5) **c.** Bewijs dat voor alle $v, w \in V$ geldt

$$\frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2 = \langle v|w\rangle\,.$$

(5) **d.** Bewijs dat voor alle $v, w \in V$ geldt

$$\frac{1}{2}\|v + w\|^2 + \frac{1}{2}\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2\,.$$

♣

(*20*) **2.** Zij V de lineaire ruimte van alle reëelwaardige 2×2 matrices:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| \, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\} .$$

De getransponeerde $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ van een matrix $\mathbf{A} \in V$ is de matrix die verkregen wordt door coëfficiënten te spiegelen in de hoofddiagonaal, dus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Verder definiëren we $\operatorname{tr} \mathbf{A}$, het spoor ("*trace*") van $\mathbf{A} \in V$, als de som der diagonaalelementen:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} .$$

We bekijken nu de vorm $\langle \, | \, \rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ gegeven door $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \, \mathbf{B} \right)$.

Bewijs dat deze vorm een reëel inprodukt definiëert, of geef een tegenvoorbeeld indien dit niet het geval is.
(*Hint:* Schrijf $\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle$ eerst uit in matrixcomponenten a_{ij} en b_{kl}, $i, j, k, l = 1, 2$.)

♣

(*25*) **3.** We definiëren de volgende grijswaardentransformatie: $T_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto T_\gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\gamma s}$. Hierin is $\gamma \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante. We voorzien de verzameling van alle transformaties van dit type, $G = \{ T_\gamma \, | \, \gamma \in \mathbb{R} \}$, van een infix vermenigvuldigingsoperator $\times$ als volgt:

$$(T_\alpha \times T_\beta)(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\alpha(s) \, T_\beta(s) \quad \text{voor alle } s \in \mathbb{R}.$$

a. Bewijs dat G een groep vormt. Ga als volgt te werk:

(5) **a1.** Bewijs dat G gesloten is ten aanzien van de vermenigvuldiging, d.w.z. bewijs dat $T_\alpha, T_\beta \in G$ impliceert $T_\alpha \times T_\beta \in G$ voor alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(5) **a2.** Bewijs dat vermenigvuldiging op G associatief is, d.w.z. bewijs dat $(T_\alpha \times T_\beta) \times T_\gamma = T_\alpha \times (T_\beta \times T_\gamma)$ voor alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(5) **a3.** Bewijs dat G een eenheidselement heeft, d.w.z. dat er een $\nu \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $T_\nu \times T_\gamma = T_\gamma \times T_\nu = T_\gamma$ voor alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Geef ook de expliciete waarde van $\nu \in \mathbb{R}$ die hoort bij dit eenheidselement $T_\nu \in G$.

(5) **a4.** Bewijs tenslotte dat elk element van G een inverse heeft, d.w.z. dat er voor elke $\eta \in \mathbb{R}$ een $\theta \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $T_\eta \times T_\theta = T_\theta \times T_\eta = T_\nu$, waarin $\nu \in \mathbb{R}$ staat voor de parameterwaarde die correspondeert met het eenheidselement uit onderdeel a3.

(5) **b.** Is G commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

♣

(*15*) **4.** Beschouw de afbeelding, $\theta_t : C(\mathbb{R}_0^+) \cap L^1(\mathbb{R}_0^+) \to \mathbb{R} : f \mapsto \theta_t(f)$, gegeven door

$$\theta_t(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(x)\, e^{-x\,t} dx \quad \text{voor willekeurige, vast gekozen } t \in \mathbb{R}_0^+.$$

(5) **a.** Laat zien dat er een $M > 0$ onafhankelijk van t bestaat zodanig dat $|\theta_t(f)| \leq M < \infty$.
(*Hint:* Gebruik de ongelijkheid van Hölder.)

(10) **b.** Toon aan dat θ_t een lineaire afbeelding is voor elke $t \in \mathbb{R}_0^+$.

♣

(*20*) **5.** Voor elke $n \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ middels het functievoorschrift

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^n}\,.$$

We hanteren de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{met bijgevolg} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

Zonder bewijs geven we de Fouriertransformatie van de functie f_1, namelijk $\widehat{f_1}(\omega) = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}\,(\omega)$.
Hierin is $\mathrm{sgn}\,(\omega) = -1$ als $\omega < 0$, $\mathrm{sgn}\,(0) = 0$, en $\mathrm{sgn}\,(\omega) = +1$ als $\omega > 0$.

Het convolutieprodukt van twee functies f en g is gedefinieerd als

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy\,,$$

indien de integraal in het rechterlid bestaat. Als dit niet het geval is, maar de functies f en g wel Fouriertransformeerbaar zijn, hanteren we de volgende *impliciete definitie* voor het convolutieprodukt ($\mathcal{F}(u)$ is hier synoniem voor $\widehat{u}$):

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\, \mathcal{F}(g)\,.$$

(5) **a.** Toon aan dat de functie $\widehat{f_n}$ zuiver imaginair is voor oneven $n \in \mathbb{N}$, en reëel voor even $n \in \mathbb{N}$.
(*Hint:* Gebruik de (anti-)symmetrie eigenschap $f_n(x) = (-1)^n f_n(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.)

b. Bewijs de volgende recursierelaties voor de functies f_n, respectievelijk $\widehat{f_n}$:

($2\frac{1}{2}$) **b1.** $f_{n+1}(x) = -\dfrac{1}{n}\, f_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** $\widehat{f}_{n+1}(\omega) = -\dfrac{1}{n}\, i\omega\, \widehat{f_n}(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$.

(5) **c.** Bepaal $\widehat{f_n}(\omega)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, gegeven het functievoorschrift $\widehat{f_1}(\omega) = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}\,(\omega)$.

(5) **d.** Bewijs: $\widehat{f_n} * \widehat{f_m} = 2\pi\, \widehat{f}_{n+m}$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$.

EINDE